

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
Российской академии наук»
(ИПФ РАН)

На правах рукописи

Голованов Антон Александрович

**Сильно нелинейные кильватерные ускоряющие структуры
в неоднородной плазме**

01.04.08 — физика плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Костюков Игорь Юрьевич

Нижний Новгород — 2019

Содержание

Введение	4
1 Общая теория кильватерной волны в плазме	21
1.1 Общие уравнения для кильватерной волны	21
1.1.1 Постановка задачи	21
1.1.2 Квазистационарное приближение	23
1.1.3 Уравнения для электромагнитного поля	25
1.2 Описание движения частиц	27
1.2.1 Кинетический подход	27
1.2.2 Траектории электронов	30
1.3 Выводы	34
2 Теория сильно нелинейного режима кильватерной волны в плазме с поперечной неоднородностью	35
2.1 Модель плазменной полости	35
2.2 Уравнение для границы плазменной полости	38
2.2.1 Влияние профиля электронного слоя	41
2.2.2 Приближение бесконечно тонкого слоя	42
2.2.3 Релятивистское приближение	44
2.2.4 Область применимости приближений	45
2.3 Электромагнитное поле в плазменной полости	49
2.3.1 Кильватерный потенциал	50
2.3.2 Продольное электрическое поле	51
2.3.3 Магнитное поле	53
2.3.4 Поперечное электрическое поле	56
2.4 Вычисление формы плазменной полости	57
2.5 Ненагруженная плазменная полость	61
2.6 Выводы	65

3	Динамика электронов в сильно нелинейном режиме кильватерной волны в плазме с поперечной неоднородностью	67
3.1	Движение релятивистских сгустков частиц в кильватерной волне . . .	67
3.2	Нагруженная плазменная полость	70
3.2.1	Эффективность ускорения	70
3.2.2	Прямоугольный электронный сгусток	73
3.2.3	Ускорение в однородном поле	77
3.3	Бетатронные колебания в плазме с глубоким каналом	83
3.4	Бетатронное излучение в плазме с глубоким каналом	87
3.5	Двухстадийный метод генерации бетатронного излучения	89
3.6	Выводы	92
4	Особенности сильно нелинейного режима кильватерной волны в двумерной геометрии	95
4.1	Базовая модель	96
4.2	Уравнение для границы плазменной полости	99
4.3	Ненагруженная плазменная полость	101
4.4	Псевдодвумерная плазменная полость в трехмерном моделировании	104
4.5	Выводы	106
5	Моделирование ускорения электронов в плазменных мишенях с продольной неоднородностью	108
5.1	Оценка параметров лазерно-плазменного ускорителя при использовании установки PEARL	109
5.2	Моделирование распределения газа в газовой ячейке	113
5.3	Двухсекционная газовая ячейка	118
5.4	Моделирование ускорения электронов в газовой ячейке	120
5.5	Выводы	128
	Заключение	130
	Список литературы	133
	Список работ по диссертации	149
	Список иллюстраций	151

Введение

Актуальность темы диссертации

Ускорители заряженных частиц играют большую роль в современной науке и являются одним из главных инструментов в физике высоких энергий. В частности, ускоренные электроны используются в лептонных коллайдерах, а также для генерации электромагнитного излучения в труднодоступных рентгеновском и гамма-диапазонах. Традиционные ускорители электронов основаны на использовании электрического поля в радиочастотных резонаторах [1; 2]. Амплитуда ускоряющего поля в них ограничена развитием мультипакторного разряда и обычно достигает величин порядка нескольких десятков МВ/м [3]. Из-за этого установки, позволяющие разогнать электроны до энергии порядка нескольких ГэВ, могут достигать существенных размеров. Так, для достижения рекордной на данный момент энергии электронов в 104 ГэВ использовался кольцевой ускоритель LEP (Large Electron-Positron Collider) с диаметром 27 км [4]. Несмотря на отсутствие ограничения по длине ускорения в кольцевых ускорителях, рост энергии ограничен потерями на синхротронное излучение электронов при их движении по криволинейной траектории. Такого недостатка лишены линейные ускорители, ярким представителем которых является линейный ускоритель в комплексе SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) в Стэнфорде, позволяющий ускорять электроны до энергии 50 ГэВ на длине ускорения 3.2 км [5; 6]. Для дальнейшего увеличения достигаемой энергии ускоренных частиц необходимо пропорциональное увеличение размеров установок. Например, в проекте Международного линейного коллайдера (International Linear Collider, ILC) планируется достичь энергии 500 ГэВ при размере ускорителя около 30 км [7; 8]. При рассмотрении перспектив достижения энергии порядка ПэВ требуемые размеры ускорителей увеличиваются до астрономических масштабов.

Одним из возможных решений проблемы большого размера традиционных ускорителей является использование плазменных методов ускорения [9—12], основанных на использовании для ускорения продольного электрического поля плаз-

менной кильватерной волны. Характерная напряженность поля в такой волне определяется концентрацией плазмы: $E_p[\text{В/м}] \approx 96\sqrt{n_p[\text{см}^{-3}]}$ [13]. Для концентрации плазмы $n_p = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ эта напряженность достигает величины порядка 100 ГВ/м, что на несколько порядков превышает возможности современных ускорителей.

В качестве источника кильватерной волны может выступать релятивистский электронный сгусток [14—16]. За счет воздействия кулоновского поля он расталкивает электроны плазмы, приводя к разделению заряда и образованию плазменной кильватерной волны позади сгустка. Фазовая скорость такой волны определяется скоростью сгустка и близка к скорости света, поэтому ускоряемые электроны могут долго оставаться в синхронизме с волной, эффективно ускоряясь в ее продольном поле. Схожим образом, за счет кулоновского притяжения электронов плазмы, генерировать кильватерную волну могут и сгустки положительно заряженных частиц (позитронов, протонов) [17—19].

Еще одним вариантом возбуждения кильватерной волны является использование мощного короткого лазерного импульса [20]. Современные лазерные установки, основанные на использовании метода усиления чирпированных импульсов [21—23], позволяют генерировать лазерные импульсы с петаваттным уровнем мощности при длине импульса в несколько десятков фемтосекунд. При их фокусировке интенсивность поля может достигать величин порядка 10^{21} Вт/см^2 , что соответствует напряженности поля в несколько десятков ТВ/м. Напрямую использовать настолько большие поля лазерного импульса для ускорения запрещает теорема Вудварда — Лоусона [24; 25], говорящая о невозможности ускорения электрона лазерным импульсом в неограниченном свободном пространстве. Обойти это ограничение возможно, используя взаимодействие лазерного импульса с веществом, в частности с твердотельными структурами [26; 27] или разреженной плазмой [10—12]. В последнем случае плазма обеспечивает преобразование поперечного и быстро осциллирующего поля лазерного импульса в продольное электрическое поле кильватерной волны, хоть и меньшей напряженности. Для создания разреженной плазмы используют газовые мишени. Мощный лазерный импульс уже на переднем фронте полностью ионизирует газы из легких элементов, таких как водород или гелий [28]. В образованной плазме происходит разделение заряда за счет воздействия пон-

деромоторной силы [29; 30], выталкивающей легкие электроны плазмы из области с большей интенсивностью лазерного поля, но практически не влияющей на тяжелые ионы на масштабах нескольких периодов кильватерной волны. Фазовая скорость образованной кильватерной плазменной волны в значительной степени определяется групповой скоростью лазерного импульса. В разреженной плазме эта скорость близка к скорости света, что позволяет использовать полученную кильватерную волну для эффективного ускорения.

Для эффективной генерации кильватерной волны оптимальна короткая длительность драйвера (сгустка частиц или лазерного импульса), по порядку величины совпадающая с плазменной длиной волны λ_p [31]. Например, для концентрации плазмы порядка 10^{18} см^{-3} плазменная длина волны соответствует длительности драйвера 110 фс. Современные фемтосекундные лазерные установки позволяют генерировать импульсы с длительностью в несколько десятков фс; они способны эффективно возбуждать кильватерную волну. С другой стороны, получение настолько коротких сгустков заряженных частиц до сих пор представляет определенные трудности. Однако в качестве драйвера могут быть использованы короткие электронные сгустки, полученные с помощью лазерно-плазменного ускорителя [32]. В то же время стоит отметить, что и более длинные сгустки частиц и лазерные импульсы могут приводить к генерации волны за счет развития различных неустойчивостей в плазме [33—38].

Характер возбуждаемой кильватерной волны зависит от степени воздействия драйвера на плазму. В случае использования электронного сгустка определяющей характеристикой является плотность заряда в сгустке, а при использовании лазерного импульса — его безразмерная амплитуда $a_0 = eE_L / (mc\omega_L)$. На Рис. 1 показаны различные режимы кильватерной волны при использовании лазерного импульса. В случае, когда интенсивность лазерного импульса достаточно мала, кильватерная волна возбуждается в линейном режиме: концентрация электронов в плазме слабо возмущается, а продольное электрическое поле, используемое для ускорения, имеет характерную синусоидальную форму. При увеличении интенсивности лазерного импульса проявляются нелинейные эффекты, в частности, зависимость продольного электрического поля от продольной координаты становится пилообраз-

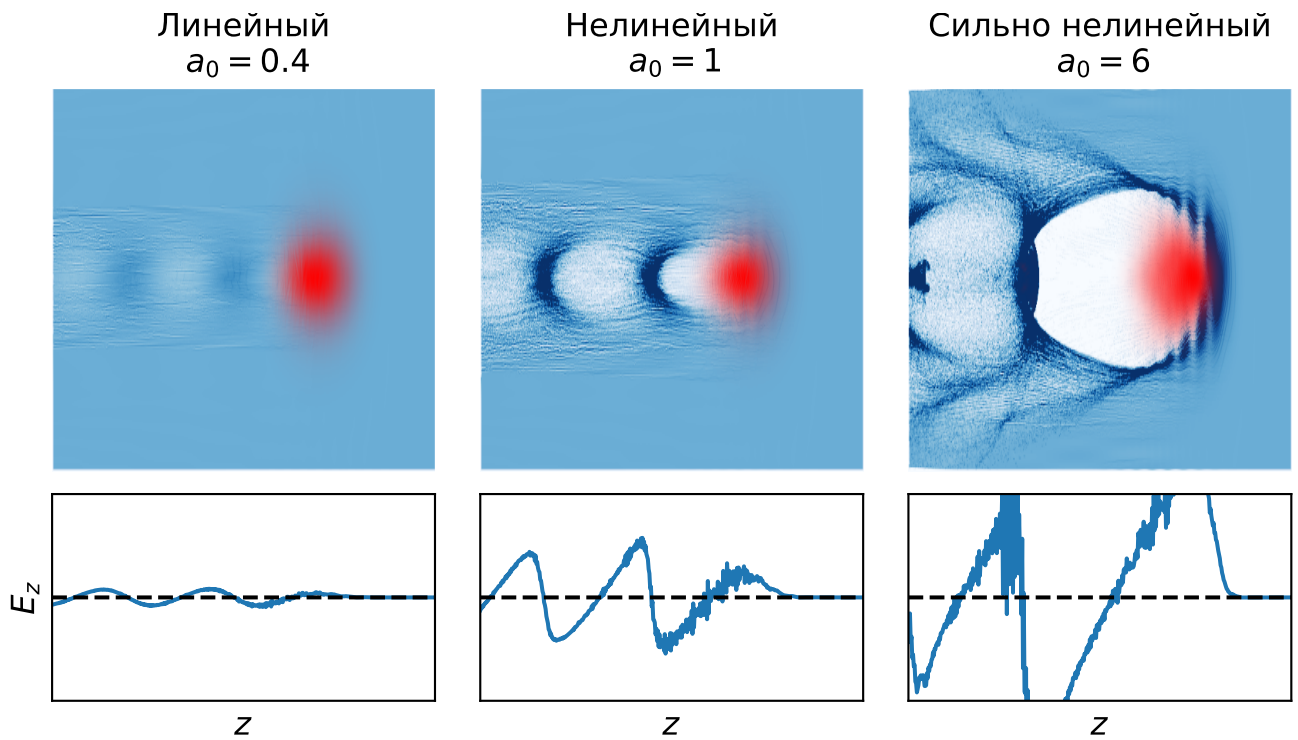


Рис. 1: Режимы плазменных кильватерных волн, возбуждаемых коротким циркулярно поляризованным лазерным импульсом: линейный, нелинейный, сильно нелинейный. На верхних графиках показано распределение концентрации электронов в кильватерной волне, полученное в результате численного моделирования взаимодействия импульса с плазмой. Интенсивность лазерного импульса, распространяющегося в направлении оси z (на рисунках вправо), показана красным цветом. На нижних графиках продемонстрированы соответствующие распределения продольного электрического поля на оси распространения импульса.

ной [39]. При дальнейшем увеличении интенсивности происходит переход в сильно нелинейный режим, обнаруженный в численном моделировании в 2002 году [40]. В этом режиме воздействие лазерного импульса настолько сильно, что он полностью расталкивает электроны от оси своего распространения. Кулоновское притяжение оставшихся у оси ионов возвращает электроны обратно, приводя к образованию за лазерным импульсом области сферической формы, практически полностью свободной от электронов плазмы, которую называют плазменной полостью или «пузырьком» («bubble» в англоязычной литературе). На границе этой полости формируется тонкий электронный слой, экранирующий полость от окружающей плазмы. Схожие режимы кильватерной волны наблюдаются и в случае использования электронного сгустка.

Сильно нелинейный режим кильватерной волны не только обеспечивает наи-

большие ускоряющие градиенты, но также примечателен тем, что в случае использования лазерного драйвера в нем может наблюдаться самоинжекция: электроны плазмы захватываются в плазменную полость и ускоряются в ней до больших энергий [41—43]. Тем самым для получения ускоренных электронных сгустков не требуется внешний источник электронов, достаточно использовать лазерный импульс и газовую мишень. Воздействие импульса на такую мишень приводит к полной ионизации газа, генерации кильватерной волны в получившейся плазме и захвату и ускорению в ней электронов плазмы. Для улучшения стабильности и лучшего контроля над параметрами сгустка могут также применять различные методы контролируемой инжекции: ионизационную инжекцию [44; 45], инжекцию при столкновении двух лазерных импульсов [46] и т. д.

Одним из основных направлений оптимизации плазменных ускорителей является создание *неоднородных плазменных мишеней* с контролируемым продольным (вдоль направления распространения драйвера) и поперечным профилем плазмы. *Продольная неоднородность* обычно обеспечивается выбором газовой мишени. Ранние эксперименты, в которых рассматривалось взаимодействие коротких лазерных импульсов тераваттного уровня мощности со сверхзвуковыми газовыми струями, показали возможность получения ускоренных электронных сгустков с зарядом больше 100 пКл, энергией порядка 100 МэВ и сравнительно малым (несколько процентов) разбросом по энергии [47—49]. К более продвинутым газовым мишеням относятся газовые ячейки [44; 50]. Простейшая газовая ячейка представляет собой закрытый сосуд, наполненный газом, с подводящей трубкой для подачи газа и отверстиями, сквозь которые может проходить драйвер, например, лазерный импульс. Внутри газовой ячейки создается однородный объем газа с контролируемым уровнем концентрации, при этом длина участка однородности может достигать нескольких сантиметров. Часть газа неизбежно покидает ячейку через отверстия для драйвера, но его концентрация быстро спадает с удалением от газовой ячейки. Более сложные газовые ячейки с двумя и более секциями могут быть использованы для создания сложных профилей с различными уровнями концентрации плазмы, в которых разделены области инжекции и ускорения электронов [51—53]. Кроме того, резкий понижающий градиент концентрации в продольном направлении исполь-

зуется для контролируемой инжекции, возникающей вследствие локального снижения фазовой скорости кильватерной волны, что позволяет повысить стабильность и улучшить свойства генерируемых ускоренных сгустков [54]. Для создания такого градиента применяют узкие газовые струи [55], комбинации из нескольких струй [56], помещенное в газовую струю лезвие [57] и др. Отдельным преимуществом этой схемы контролируемой инжекции является ее применимость для ускорителей, в которых драйвером является сгусток заряженных частиц и обычная самоинжекция невозможна [58]. Идея использования продольной неоднородности плазмы находит применение и при взаимодействии лазерного импульса с твердотельными мишенями, в которых создание разреженной предплазмы на границе мишени оказывает существенное влияние на генерацию быстрых электронов, в том числе и за счет возбуждения кильватерной волны в предплазме [59; 60].

Другим направлением развития плазменных мишеней является создание структур с *поперечной неоднородностью*. Обычно такими структурами являются симметричные относительно оси распространения драйвера каналы с пониженной концентрацией плазмы. Так, сравнительно неглубокие плазменные каналы широко используются для обеспечения каналирования лазерного импульса в условиях, когда самоканалирование невозможно [61—64]. Именно использование плазменного канала, образованного в результате газового разряда в наполненном газом капилляре, позволило достичь некогда рекордных результатов по энергии ускоренных электронов [65; 66]. Развитие этого метода за счет использования обратного тормозного излучения при взаимодействии предварительного лазерного импульса с плазмой для ее нагрева, приводящего к углублению канала в плазме, позволило обеспечить каналирование основного лазерного импульса петаваттного уровня мощности на длине 20 см. В результате в экспериментах наблюдались ускоренные электронные сгустки с рекордным на данный момент уровнем энергии 7.8 ГэВ [67]. С другой стороны, поперечный профиль в плазме дает дополнительную степень свободы для изменения свойств кильватерной волны. Так, использование практически полого плазменного канала (с концентрацией плазмы близкой к нулю) на оси распространения лазерного импульса позволяет независимо контролировать фокусирующую и ускоряющую силы и тем самым подавлять рост эмиттанса ускоряемых электронных сгустков [68—

70]. Также независимо контролируются длина дефазировки (расстояние, на котором электроны обгоняют кильватерную волну и попадают в ее замедляющую фазу) и длина истощения лазерного импульса. Как показало численное моделирование, использование полого канала может позволить получить ускоренные электронные сгустки с очень малым разбросом по энергии в 0.3% [71]. Кроме того, использование полых каналов открывает возможность для плазменного ускорения позитронов, что невозможно в однородной плазме из-за кулоновского отталкивания со стороны положительно заряженных ионов [72; 73]. Экспериментальные способы получения плазмы с полым или практически полым каналом также широко обсуждаются. Для ускорителей на основе электронного или протонного драйвера такой канал может быть создан путем использования для ионизации газа лазерного импульса с кольцеобразной поперечной структурой [72]. Достаточно глубокие каналы (с падением концентрации в несколько раз) могут быть получены за счет абляции вещества со стенок капилляра при разряде в нем [74], предварительного нагрева плазмы лазерным импульсом [75] или нагрева газа нерелятивистским электронным сгустком [76], столкновения нескольких газовых струй [77]. Кроме того, широко рассматривается использование каналов в твердотельных мишенях [26; 78] и взаимодействие лазерных импульсов с твердотельными мишенями с поперечно-неоднородной структурой [27; 79—83].

Несмотря на большие перспективы использования плазменных методов ускорения и прогресс в изготовлении плазменных мишеней с различными видами *неоднородности*, до сих пор их практическое применение (в частности, в лазерах на свободных электронах) сильно ограничено из-за малой стабильности параметров и недостаточного качества получаемых электронных сгустков, в том числе достаточно большого разброса по энергии. В связи с этим большой интерес представляет теоретическое исследование этого режима. Одним из главных методов исследования является численное моделирование методом частиц в ячейках (particle-in-cell, PIC) [84; 85]. В рамках этого метода эволюция электромагнитного поля описывается дискретизированными уравнениями Максвелла на трехмерной пространственной сетке, а плазма представляется в виде газа неделимых макрочастиц, каждая из которых состоит из большого числа реальных частиц. Движение макрочастиц описывается

релятивистскими уравнениями. Подобное описание, основанное на базовых физических принципах, позволяет достаточно точно моделировать очень широкий класс задач и поэтому используется для проведения «численного эксперимента». В частности, изображения, показанные на Рис. 1, построены именно с использованием подобного численного моделирования. Программные пакеты, основанные на данном методе, обычно позволяют задавать произвольные продольные и поперечные профили плазмы, поэтому являются важным инструментом для расчетов плазменного ускорения в различных типах неоднородных мишеней. За счет роста доступных вычислительных мощностей большую актуальность в последнее время приобретает моделирование с использованием приближенных к эксперименту профилей плазмы, рассчитанных при помощи моделирования плазменных мишеней методами вычислительной гидродинамики [86; 87].

Большой интерес представляет и развитие аналитических методов описания кильватерных волн и, в частности, сильно нелинейного режима. Различные теоретические подходы привели к созданию простейших феноменологических моделей [88; 89], в которых предполагается идеально сферическая форма плазменной полости; качественных моделей, частично описывающих явления в сильно нелинейном режиме [90]; теорий подобия [91—94], позволяющих установить общие закономерности в данном режиме. Одним из основных достижений было создание феноменологической модели, позволяющей описать форму границы плазменной полости в однородной плазме с учетом воздействия на нее ускоряемого электронного сгустка при помощи обыкновенного дифференциального уравнения [95—99]. Однако до сих пор не существует самосогласованной теории данного режима. Кроме того, предшествующие теоретические работы в основном рассматривали случай однородной плазмы. Существующие теоретические модели кильватерной волны в плазме с каналами соответствуют случаю квазилинейной волны [100—102], но для сильно нелинейного случая такие модели отсутствуют. Развитию теории сильно нелинейной кильватерной волны в плазме с поперечной неоднородностью посвящена значительная часть настоящей работы.

Кроме получения высокоэнергетичных сгустков заряженных частиц, плазменные ускорители имеют еще одно важное приложение. Дело в том, что движущиеся

в кильватерной волне электроны совершают поперечные бетатронные колебания за счет воздействия на них фокусирующих сил со стороны плазменных полей. С учетом большой энергии частиц в результате этих колебаний могут излучаться электромагнитные волны в труднодоступных диапазонах спектра, в том числе в рентгеновском и гамма-диапазоне [103—107]. Бетатронное излучение от лазерно-плазменных источников неоднократно наблюдалось экспериментально [108—111], а его характеристики (коллимированность, малая длительность, хорошая пространственная когерентность) оказались подходящими для исследования структуры объектов [112; 113]. Исследование воздействия неоднородности плазмы и, в частности, полого канала в ней на бетатронные колебания и бетатронное излучение также представляет значительный интерес и будет рассмотрено в данной работе.

Цель работы

Диссертационная работа направлена на разработку и совершенствование теоретических методов исследования сильно нелинейного режима кильватерной волны в плазме с поперечными и продольными неоднородностями. В рамках исследования были поставлены следующие цели:

1. Разработать модель плазменной полости в плазме с поперечной неоднородностью с учетом произвольной формы электронного слоя на ее границе. Вычислить распределения компонент электромагнитного поля как внутри плазменной полости, так и снаружи нее. Рассчитать влияние полого канала в плазме на форму возбуждаемой плазменной полости.
2. Описать влияние ускоряемых электронных сгустков на форму плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме, рассчитать эффективность ускорения. Проанализировать возможность создания однородного ускоряющего поля путем подбора параметров плазмы и ускоряемого сгустка.
3. Рассчитать параметры бетатронных колебаний и бетатронного излучения электронных сгустков, ускоряемых в плазменной полости в плазме с полым каналом, и провести их сравнение со случаем однородной плазмы.
4. Разработать модель плазменной полости в двумерном пространстве и проана-

лизировать ее отличия от аксиально-симметричной плазменной полости в трехмерном пространстве.

5. Рассчитать профили газа в одно- и двухсекционных газовых ячейках при помощи методов численной гидродинамики. На основе этих профилей рассчитать параметры электронных сгустков, генерируемых в результате взаимодействия мощного короткого лазерного импульса с газовой ячейкой.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в следующем:

- Разработана модель плазменной полости в плазме с поперечной неоднородностью для случая произвольной формы электронного слоя на ее границе.
- Получены явные выражения для компонент электромагнитного поля как внутри плазменной полости, так и снаружи нее в приближении малости толщины электронного слоя на границе плазменной полости.
- Получено аналитическое выражение для формы ненагруженной плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме.
- Рассчитана эффективность ускорения электронных сгустков в плазме с поперечной неоднородностью, а также найдены параметры электронного сгустка, обеспечивающие его ускорение в однородном поле в плазме с полым каналом.
- Рассчитаны характеристики бетатронных колебаний и бетатронного излучения электронов, ускоряемых в кильватерной волне в плазме с полым каналом.
- Разработана модель плазменной полости в двумерной геометрии и проведено ее сравнение с плазменной полостью в трехмерной осесимметричной геометрии.
- Профили плазмы, полученные при помощи методов вычислительной гидродинамики, были использованы в полном трехмерном численном моделировании лазерно-плазменного ускорения для параметров установки PEARL в ИПФ РАН.

Научная и практическая значимость

- Разработанная феноменологическая модель плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме может быть использована при анализе результатов численного моделирования и экспериментов по плазменному ускорению частиц в плазме с различными каналами.
- Найденные характеристики бетатронного излучения при ускорении электронов в плазме с полым каналом могут быть использованы при создании источников излучения и диагностики плазменных ускорителей.
- Разработанная модель плазменной полости в двумерном пространстве описывает отличия от реалистичного случая аксиально-симметричной плазменной полости в трехмерном пространстве, что может быть использовано при интерпретации результатов и определения пределов применимости двумерного численного моделирования.
- Проведенные численные расчеты газовых ячеек были использованы при создании газовой ячейки для экспериментов по лазерно-плазменному ускорению на установке PEARL.
- Проведенное моделирование лазерно-плазменного ускорения в газовой ячейке было использовано при планировании и интерпретации результатов экспериментов на установке PEARL.

Краткое содержание работы

Глава 1 является вводной и не содержит новых результатов. Тем не менее, она необходима для дальнейшего изложения. В ней представлен общий подход к описанию кильватерной волны, возбуждаемой лазерным импульсом или релятивистским электронным сгустком в неоднородной плазме. В *разделе 1.1* вводятся единицы измерения, используемые на протяжении всей работы, а также приводятся общие формулы, связывающие электромагнитное поле и потенциалы в кильватерной волне с плотностями токов и зарядов. Описание ведется в предположении осевой симметрии и применимости пондеромоторного описания для лазерного импульса, при котором лазерное поле не входит в компоненты электромагнитного поля. Также используется квазистатическое приближение, в котором предполагается, что струк-

тура кильватерной волны меняется медленно по сравнению с характерными плазменными временами. В *разделе 1.2* описывается движение электронов плазмы. Для описания плазмы используется кинетический подход с использованием уравнения Власова для функций распределения компонент плазмы, в котором электромагнитное поле является самосогласованным. В использованном описании температурными эффектами и столкновениями также пренебрегается. Путем использования метода характеристик осуществляется переход от уравнения Власова к уравнениям для траекторий частиц. *Раздел 1.3* содержит выводы по главе.

Глава 2 посвящена изложению теории сильно нелинейного режима кильватерной волны (режима плазменной полости) в поперечно-неоднородной плазме. В *разделе 2.1* предложена феноменологическая модель плазменной полости. Модель основывается на предположении, что внутри полости отсутствуют электроны плазмы, а на ее границе находится тонкий электронный слой, причем его форма считается произвольной. В *разделе 2.2* на основе феноменологической модели рассчитано распределение кильватерного потенциала внутри плазменной полости и получено дифференциальное уравнение, описывающее ее границу. Показано, что форма электронного слоя на границе плазменной полости очень слабо влияет на коэффициенты этого уравнения, а также рассмотрены два приближения: приближение бесконечно тонкого слоя и релятивистское приближение, при которых коэффициенты уравнения можно существенно упростить. Найдены области применимости приближений и на основе сравнения с результатами численного моделирования продемонстрирована справедливость релятивистского приближения. В *разделе 2.3* в релятивистском приближении найдены явные выражения для компонент электромагнитного поля как внутри, так и снаружи плазменной полости. Путем сравнения полученных результатов с результатами численного моделирования кильватерной волны методом частиц в ячейках показана применимость полученных формул. В *разделе 2.4* приведен общий метод аналитического нахождения формы плазменной полости. В *разделе 2.5* рассмотрена ненагруженная плазменная полость, то есть полость без ускоряемых электронных сгустков. Найдена ее форма и показано, что наличие полого канала в плазме приводит к сокращению ее длины и уменьшению амплитуды электрического поля в ней. Путем сравнения с результатами численно-

го моделирования продемонстрирована хорошая применимость разработанной теории. В разделе 2.6 приведены выводы по главе.

Глава 3 посвящена эффектам, связанным с ускорением электронов в плазменной полости, и их динамике. В *разделе 3.1* рассмотрен метод приближенного расчета сил, действующих на релятивистские частицы, движущиеся преимущественно в направлении распространения кильватерной волны. Найдены значения для этих сил в сильно нелинейной кильватерной волне в поперечно-неоднородной плазме. В *разделе 3.2* рассмотрена нагруженная плазменная полость, то есть полость с ускоряемыми электронами, в поперечно-неоднородной плазме. Проведен расчет эффективности передачи энергии от плазменной полости к электронному сгустку для произвольной его формы, а также найдена максимально возможная мощность ускорения. Рассмотрено влияние прямоугольного электронного сгустка на форму плазменной полости, найдено пороговое значение его плотности, при которой достигается наиболее эффективное ускорение. Также найден продольный профиль ускоряемого сгустка, обеспечивающий его ускорение в однородном электрическом поле. В *разделе 3.3* проанализированы поперечные бетатронные колебания в плазме с полым каналом и проведено их сравнение с бетатронными колебаниями в однородной плазме; найден период колебаний. В *разделе 3.4* рассмотрено вызванное бетатронными колебаниями бетатронное излучение в синхротронном режиме в плазме с полым каналом. Найдена критическая частота спектра излучения. В *разделе 3.5* предложен двухстадийный метод генерации бетатронного излучения на основе перехода сгустка из плазмы с одним набором параметров в плазму с другим набором параметров. Найдены критические частоты спектра излучения при наличии и отсутствии полого канала на второй стадии. *Раздел 3.6* содержит выводы по главе.

Глава 4 посвящена описанию плазменной полости в двумерном пространстве, что важно в контексте широкого использования двумерного моделирования лазерно-плазменного взаимодействия в целях экономии вычислительных ресурсов. В *разделе 4.1* описана модель плазменной полости, подобная модели, предложенной в главе 2, и вычислена структура кильватерного потенциала. В *разделе 4.2* получено уравнение, описывающее границу плазменной полости. *Раздел 4.3* посвящен описанию ненагруженной плазменной полости. Как аналитически, так и с помощью

численного моделирования методом частиц в ячейках проведено сравнение между плазменной полостью в двумерном пространстве и аксиально-симметричной полостью в трехмерном пространстве. В *разделе 4.3* предложен метод генерации квазидвумерной полости в трехмерном пространстве при помощи дискообразного электронного сгустка. *Раздел 4.5* содержит выводы по главе.

В *главе 5* исследуется лазерно-плазменное ускорение электронов в газовых мишенях с продольной неоднородностью на примере газовых ячеек для параметров лазерного импульса, соответствующих установке PEARL в ИПФ РАН [114]. В *разделе 5.1* на основе теории подобия оценены ожидаемые параметры лазерно-плазменного ускорителя на базе установки PEARL и представлены требования к газовым мишеням, необходимые для достижения наибольшей энергии ускоренных электронов. Показано, что эта энергия может достигать уровня больше 1 ГэВ для плазмы с концентрацией порядка 10^{18} см^{-3} . С точки зрения длины ускорения наиболее подходящими мишенями являются газовые ячейки, поэтому *раздел 5.2* посвящен расчету профиля газа и рассмотрению влияния параметров газовой ячейки на него с использованием методов вычислительной гидродинамики в программном пакете OpenFOAM. В *разделе 5.3* рассмотрена более сложная двухсекционная газовая ячейка, позволяющая создать два участка с различными уровнями концентрации плазмы. Показано, что определяющую роль в возможности получения большой разницы концентраций играет соотношение между размером отверстия в перегородке между секциями и размерами выходных отверстий. На основе профилей плазмы, полученных с использованием методов численной гидродинамики, в *разделе 5.4* проведено моделирование лазерно-плазменного ускорения электронов в газовой ячейке для различных уровней концентрации плазмы. Моделирование продемонстрировало возможность получения ускоренных квазимоноэнергетических электронных сгустков с энергией более 1 ГэВ. *Раздел 5.5* содержит выводы по главе.

Достоверность результатов

Представленное исследование опирается на известные физические модели, широко используемые при изучении кильватерных волн, а также на ряд теоретиче-

ских методов, имеющих строгое математическое обоснование: теория возмущений, разложение в ряд по малому параметру и др. Основные результаты сопоставлялись с результатами полномасштабного трехмерного численного моделирования, основанного на базовых физических принципах.

Апробация результатов и публикации

По теме диссертации опубликовано 17 работ, в том числе 10 статей [A1—A10] в изданиях, индексируемых в базе Web of Science, и 7 работ в трудах конференций [A11—A17].

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отделения нелинейной динамики и оптики ИПФ РАН, а также на следующих конференциях:

1. 2nd European Advanced Accelerator Concepts Workshop (EAAC-2015), La Biodola, Isola d'Elba, Italy, September 13–19, 2015;
2. XVII научная школа «Нелинейные волны — 2016», Нижний Новгород, 27 февраля — 4 марта 2016 г.;
3. 17th Advanced Accelerator Concepts Workshop (AAC 2016), National Harbor, Maryland, USA, July 31–August 5, 2016;
4. International Scientific Conference “Science of the Future 2016”, Kazan, Russia, September 20–23, 2016;
5. International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics 2017” (NWP-2017), Moscow, Russia, July 22–28, 2017;
6. 3rd European Advanced Accelerator Concepts Workshop (EAAC-2017), La Biodola, Isola d'Elba, Italy, September 24–30, 2017;
7. XVIII научная школа «Нелинейные волны — 2018», Нижний Новгород, 26 февраля — 4 марта 2018 г.;
8. XIVth International Conference on Plasma Electronics and New Acceleration Methods, Kharkiv, Ukraine, August 27–31, 2018;
9. 35th European Conference on Laser Interaction with Matter, Rethymno, Greece, October 22–26, 2018;
10. VII International Conference “Frontiers of Nonlinear Physics 2019” (FNP-2019),

Nizhny Novgorod, Russia, June 28 – July 4, 2019.

Личный вклад автора

Автор внес основополагающий вклад в получение результатов, описанных в главах 2–5. Постановка задач и анализ полученных результатов проводились совместно с научным руководителем И. Ю. Костюковым при участии А. М. Пухова и Й. Томаса.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка цитируемой литературы и списка публикаций по диссертации. Общий объем диссертации составляет 159 страниц, включая 51 рисунок, 1 таблицу, список литературы из 165 наименований на 16 страницах, список публикаций по диссертации из 17 наименований на 2 страницах и список иллюстраций на 9 страницах.

На публичную защиту выносятся следующие положения:

1. Поперечный профиль электронного слоя на границе плазменной полости слабо влияет на ее форму и на поля внутри полости, но при этом оказывает определяющее влияние на распределения компонент электромагнитного поля снаружи плазменной полости. Наличие полого канала в плазме приводит к укорочению плазменной полости.
2. Максимальная мощность, вырабатываемая кильватерным полем при ускорении электронных сгустков, определяется размером полости и поперечным профилем плазмы. Для ускоряемых сгустков прямоугольной формы существует пороговая плотность заряда, при превышении которой сгусток препятствует замыканию полости. Выбор плотности заряда равной пороговой позволяет добиться максимальной эффективности ускорения. Для произвольного поперечного профиля плазмы существует продольный профиль плотности заряда

электронного сгустка, при котором обеспечивается его ускорение в однородном поле с максимальной эффективностью; для плазмы с полым каналом оптимальный профиль сгустка является трапециевидным.

3. При ускорении электронов в полном канале существуют два предельных режима поперечных бетатронных колебаний электронов в зависимости от размера канала и амплитуды колебаний. В случае глубокого проникновения электронов в стенки канала период колебаний и критическая частота спектра бетатронного излучения такие же, как в однородной плазме. В противоположном случае период колебаний электронов становится больше, а ширина спектра бетатронного излучения увеличивается.
4. Плазменная полость в двумерном пространстве является удлиненной в продольном направлении по сравнению со сферической аксиально-симметричной полостью в трехмерном пространстве. Пространственное распределение сил при этом имеет такую же структуру, но амплитуда фокусирующей силы становится в два раза выше.
5. В газовой ячейке устанавливается однородное квазистатическое распределение газа, если суммарный поперечный размер выходных отверстий меньше поперечного размера трубки, через которую подводится газ. Двухсекционная газовая ячейка позволяет получить профиль газа с двумя различными уровнями концентрации, если размер отверстия в перегородке между двумя секциями сильно меньше размеров выходных отверстий.

1 Общая теория кильватерной волны в плазме

1.1 Общие уравнения для кильватерной волны

1.1.1 Постановка задачи

Перед тем, как приступить к построению теории кильватерных волн, кратко опишем план ее построения и основные приближения, используемые для описания плазмы и драйвера (электронного сгустка или лазерного импульса). Для нахождения точного решения задачи о генерации кильватерной волны при взаимодействии драйвера с полностью ионизованной плазмой, необходимо самосогласованное решение кинетических уравнений Власова для компонент плазмы и уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Самосогласованное описание можно упростить, используя следующие допущения:

- Построение теории ведется в цилиндрической геометрии в приближении аксиальной симметрии задачи относительно оси распространения драйвера. Заданный поперечно-неоднородный профиль плазмы является цилиндрически-симметричным.
- Кильватерная волна описывается в установившемся режиме (так называемое квазистатическое приближение). Эволюция кильватерной волны и драйвера по мере его распространения в плазме (в частности, дефокусировка и поглощение лазерного импульса, различные неустойчивости, развивающиеся в результате взаимодействия лазерного импульса или сгустка частиц с плазмой) в данной работе не рассматривается. Также предполагается, что фазовая скорость волны, определяемая скоростью драйвера, близка к скорости света.
- С учетом малой длительности драйвера, составляющей обычно лишь несколько десятков фемтосекунд, и релятивистского характера движения электронов в кильватерной волне делается несколько допущений при описании плазмы. В частности, плазма считается полностью ионизованной, бесстолкновительной и холодной (не учитывается тепловое движение). Также предполагается, что

сравнительно тяжелые ионы плазмы можно считать полностью неподвижными.

- Для описания электромагнитного поля кильватерной волны используются уравнения Максвелла. При этом в них не учитывается поле лазерного импульса, воздействие которого на плазму описывается при помощи усредненной пондеромоторной силы.

Рассмотрим кильватерную волну, возбуждаемую драйвером (в роли которого может выступать лазерный импульс или релятивистский электронный сгусток), движущимся вдоль оси z в неограниченной полностью ионизованной плазме. Пусть вдоль этой оси плазма является однородной (либо масштаб продольной неоднородности много больше масштабов кильватерной волны), а в поперечном направлении имеет неоднородность, обладающую свойством осевой симметрии. Тогда концентрация плазмы в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) описывается функцией $n(r)$. Мы будем предполагать, что свойством осевой симметрии обладают и все остальные величины, используемые в задаче. Невозмущенные электронная и ионная плотности заряда равны по модулю и пропорциональны концентрации плазмы: $\rho_e(r) = -\rho_i(r) \propto n(r)$. Соответственно, плотность заряда в пространстве складывается из трех компонент: плотностей электронов ρ_e и ионов ρ_i плазмы, а также плотности заряда релятивистских сгустков частиц ρ_B (как драйвера, так и ускоряемых сгустков):

$$\rho(t, z, r) = \rho_e(t, z, r) + \rho_i(t, z, r) + \rho_B(t, z, r). \quad (1.1)$$

Аналогичным образом складываются компоненты плотности тока \mathbf{J} . В роли частиц, дающих вклад в ρ_B и \mathbf{J}_B , могут выступать электроны, позитроны, ионы. Электромагнитное поле кильватерной волны в условиях осевой симметрии обладает тремя компонентами: E_z, E_r, B_ϕ . При этом в электромагнитном поле мы не будем учитывать поле лазерного драйвера, который будет описываться в пондеромоторном приближении. В рамках этого приближения вместо учета поля лазера в силе Лоренца воздействие лазерного импульса на частицу описывается дополнительной пондеромо-

торной силой [30; 115—117]

$$\mathbf{F}_L = -\frac{q^2}{2m\gamma c^2} \nabla \langle \mathbf{A}_L^2 \rangle, \quad (1.2)$$

где q и m — заряд и масса частицы соответственно, γ — ее Лоренц-фактор, $\mathbf{A}_L(t, z, r)$ — вектор-потенциал лазерного импульса,¹ операция $\langle \dots \rangle$ отвечает усреднению по периоду лазерного поля. При использовании пондеромоторного приближения мы можем потребовать осевой симметрии функции $\langle \mathbf{A}_L^2 \rangle$, что позволяет рассматривать лазерный импульс с произвольной поляризацией без нарушения свойств симметрии задачи.

Для удобства будут использоваться безразмерные величины, в которых время нормировано на ω_p^{-1} , пространственные координаты на $k_p^{-1} = c/\omega_p$, импульсы и энергии на mc и mc^2 соответственно, заряды на e , концентрации на n_p , а компоненты электромагнитного поля на $mc\omega_p/e$. Здесь $e > 0$ и m — модуль заряда и масса электрона соответственно, c — скорость света в вакууме, n_p — характерная концентрация электронов в плазме, а $\omega_p = (4\pi e^2 n_p/m)^{1/2}$ — характерная электронная плазменная частота. В качестве характерной концентрации может быть выбрана концентрация плазмы в какой-то области: например, для случая плазмы с глубоким каналом она может соответствовать концентрации плазмы снаружи канала. Безразмерная пондеромоторная сила при этом записывается как

$$\mathbf{F}_L = -\frac{Q^2}{2\mu\gamma} \nabla \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{a} = e\mathbf{A}_L/(mc^2)$ — безразмерный вектор-потенциал лазерного импульса, Q и μ — безразмерные заряд и масса. В частности, для электрона $Q_e = -1$ и $\mu_e = 1$.

1.1.2 Квазистационарное приближение

Скорость распространения плазменной кильватерной волны в плазме определяется скоростью движения драйвера — возбуждающего ее лазерного импульса или электронного сгустка. Эта скорость близка к скорости света, равной единице в

¹ Предполагается калибровка $\varphi = 0$. При использовании произвольной калибровки \mathbf{A}^2 следует заменить на квадрат 4-потенциала $A_\alpha A^\alpha$, являющегося калибровочно-инвариантной величиной.

безразмерных переменных. Поскольку сам драйвер и структура кильватерной волны достаточно медленно изменяются по мере их распространения в плазме, удобно перейти к новым переменным

$$\xi = t - z, \quad \tau = t, \quad (1.4)$$

в которых сопутствующая продольная координата ξ движется со скоростью света в направлении распространения кильватерной волны. Соответствующее данной замене преобразование производных можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (1.5)$$

Покажем, что при этом «новое время» τ становится медленной переменной по сравнению с пространственными координатами r и ξ .

Сначала рассмотрим эффект, связанный с отличием фазовой скорости кильватерной волны v_{ph} от скорости света. Типичным масштабом по ξ и по r может служить плазменная длина волны $\lambda_p = 2\pi \sim 1$. Если предположить, что структура драйвера и кильватерной волны остаются неизменными, то все величины в кильватерной волне зависят от комбинации $z - v_{ph}t = -\xi + (1 - v_{ph})\tau$. В этом случае производная по τ будет пропорциональна $1 - v_{ph}$, т. е. отличию фазовой скорости кильватерной волны v_{ph} от скорости света 1. Для релятивистского электронного драйвера с Лоренц-фактором частиц $\gamma_0 \gg 1$ это отличие мало и пропорционально $\gamma_0^{-2} \ll 1$. Для лазерного драйвера фазовая скорость кильватерной волны близка к групповой скорости лазерного импульса, определяемой из дисперсионного соотношения:

$$\varepsilon(\omega_L) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2}, \quad v_{gr,L} = \left(\frac{d(\sqrt{\varepsilon}\omega_L)}{d\omega_L} \right)^{-1} \approx \sqrt{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

где ω_L — циклическая частота лазерного импульса. В случае использования достаточно разреженной плазмы отличие этой скорости от 1 пропорционально отношению квадратов лазерной и плазменной длин волн $\lambda_L^2/\lambda_p^2 \ll 1$. Таким образом, вклад отличия фазовой скорости волны от скорости света в производную по τ мал.

Теперь оценим характерный временной масштаб эволюции драйвера при его

распространении в плазме. Для сфокусированного лазерного импульса наиболее сильным эффектом является дефокусировка, характерная длина которой называется рэлеевской длиной [118], равной $\pi\lambda_p^2/\lambda_L$ для гауссова импульса. Соответственно, характерное время эволюции лазерного импульса в $\lambda_p/\lambda_L \gg 1$ больше плазменных масштабов λ_p , поэтому производная по τ мала. Стоит заметить, что влияние дефокусировки сильнее влияния отличия групповой скорости лазерного импульса от скорости света. В случае использования электронного драйвера наиболее сильный эффект обусловлен поперечными бетатронными колебаниями в поле кильватерной волны [103], период которых в сильно нелинейной волне пропорционален $\sqrt{\gamma_0}\lambda_p \gg \lambda_p$. Следовательно, влияние этого эффекта также мало.

Третьим потенциальным источником производной по τ является продольная неоднородность плазмы. Вкладом этого эффекта можно пренебречь, если масштаб неоднородности L намного превышает плазменную длину волны λ_p . Для примера, длина волны в плазме с концентрацией 10^{18} см^{-3} равняется 33 мкм. Характерные масштабы неоднородностей в мишенях, используемых для плазменного ускорения, составляют не менее сотен мкм, поэтому обычно это условие соблюдается. Добиться нарушения этого условия можно либо путем увеличения плазменной длины волны из-за использования разреженной плазмы (что с точки зрения ускорения целесообразно только в случае, если размер мишени и соответствующие масштабы неоднородности при этом тоже растут с ростом плазменной длины волны), либо путем использования очень узких мишеней [119; 120]. В рамках этой работы такие случаи рассматриваться не будут.

Таким образом, производной по τ в уравнениях можно пренебречь, поэтому в дальнейших вычислениях мы не будем учитывать зависимость потенциалов и полей кильватерной волны от «нового времени» τ . Данное приближение, в котором все величины предполагаются зависящими только от переменных $\xi = t - z$ и r , называется квазистатическим [121; 122].

1.1.3 Уравнения для электромагнитного поля

Электромагнитное поле в кильватерной волне удобно описывать при помощи векторного потенциала \mathbf{A} и кильватерного потенциала $\Psi = \varphi - A_z$, где φ — обычный скалярный потенциал. В квазистатическом приближении Ψ и A_z являются функци-

ями от $\xi = t - z$ и r . В условиях осевой симметрии задачи существует только три проекции электромагнитного поля, которые могут быть выражены через потенциалы:

$$E_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (1.7)$$

$$E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} + B_\phi, \quad (1.8)$$

$$B_\phi = -\frac{\partial A_r}{\partial \xi} - \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (1.9)$$

Для потенциалов используется калибровка Лоренца:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (1.10)$$

приводящая к жесткой связи между A_r и Ψ :

$$A_r(\xi, r) = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial \Psi(\xi, r')}{\partial \xi} dr'. \quad (1.11)$$

Таким образом, A_z и Ψ являются двумя независимыми потенциалами, полностью определяющими распределение электромагнитного поля в кильватерной волне. Использование калибровки Лоренца приводит к разделению волновых уравнений для потенциалов:

$$\Delta A_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -J_z, \quad (1.12)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho, \quad (1.13)$$

где J_z — продольная компонента плотности тока, а ρ — плотность заряда. Переход к кильватерному потенциалу и переменным ξ и r позволяет получить уравнения для потенциалов A_z , Ψ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -J_z, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = J_z - \rho. \quad (1.15)$$

Важным свойством этих уравнений является их локальность по ξ : распределения потенциалов в произвольной поперечной плоскости $\xi = \xi_0$ зависят только от распределений плотностей заряда и тока в той же плоскости. Это обстоятельство обусловлено использованием квазистатического приближения. Учет эффектов, связанных с эволюцией драйвера и отличием фазовой скорости кильватерной волны от скорости света, приведет к появлению производных по ξ и τ в уравнениях (1.14, 1.15).

Интегрируя уравнения (1.14) и (1.15) по координате r , мы можем получить

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{r} \int_0^r J_z(\xi, r') r' dr', \quad (1.16)$$

$$\Psi = - \int_r^\infty \frac{dr'}{r'} \int_0^{r'} r'' (J_z - \rho) dr''. \quad (1.17)$$

Здесь использовано предположение, что кильватерный потенциал Ψ обращается в нуль на большом удалении от оси z (при $r \rightarrow \infty$), поскольку плазма на удалении от оси должна оставаться невозмущенной. Также, поскольку в выражение (1.9) для магнитного поля B_ϕ входит лишь радиальная производная от A_r , дальнейшее интегрирование в (1.16) не требуется. Использование выражений (1.9), (1.11), (1.16) позволяет выразить магнитное поле B_ϕ через кильватерный потенциал

$$B_\phi = \frac{1}{r} \int_0^r \left[J_z(\xi, r') + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}(\xi, r') \right] r' dr'. \quad (1.18)$$

Выражения (1.7, 1.8, 1.18) совместно с решением для кильватерного потенциала (1.17) позволяют найти пространственные распределения компонент электромагнитного поля для известных распределений источников ρ и J_z . Способ самосогласованного нахождения распределений этих источников в плазме будет рассмотрен далее.

1.2 Описание движения частиц

1.2.1 Кинетический подход

Для самосогласованного нахождения пространственных распределений плотностей тока и заряда необходимо дополнить уравнения Максвелла для электромаг-

нитного поля уравнениями, описывающими динамику плазмы. В кинетическом описании каждой из компонент плазмы отвечает функция распределения $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, где индекс α соответствует сорту частиц. Эволюция функции распределения подчиняется уравнению Власова [123]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (1.19)$$

где

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + \frac{Q_\alpha}{\gamma_\alpha} \mathbf{p} \times \mathbf{B} - \frac{Q_\alpha^2}{2\mu_\alpha \gamma_\alpha} \nabla \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (1.20)$$

$$\gamma_\alpha = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2 + \frac{Q_\alpha^2}{\mu_\alpha} \langle \mathbf{a}^2 \rangle}, \quad (1.21)$$

μ_α и Q_α — безразмерные масса и заряд частицы сорта α . В частности, для электрона $\mu_e = 1$, $Q_e = -1$. Сила (1.20), входящая в уравнение Власова, включает в себя силу Лоренца со стороны полей кильватерной волны и электронных сгустков и ponderomotorную силу со стороны лазерного импульса. При этом быстрое осцилляторное движение электронов в поле лазерного импульса вносит вклад в усредненный Лоренц-фактор γ_α [30; 115—117]. Уравнение (1.19) записано в бесстолкновительном приближении. Это обусловлено тем, что частота столкновений электронов в плазме ν_e обычно много меньше плазменной частоты ω_p . Поскольку кильватерная волна распространяется примерно со скоростью света, учет столкновений становится важен на расстоянии c/ν_e позади драйвера, которое значительно превышает плазменную длину волны $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$. Стоит отметить, что в уравнение Власова входят самосогласованные плазменные поля, то есть его нужно решать совместно с уравнениями (1.17, 1.18) для полей.

Решение уравнения Власова (1.19) в известном поле можно найти, используя сохранение функции распределения на характеристиках:

$$f_\alpha[t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)] = f_\alpha(0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), \quad (1.22)$$

где характеристики находятся путем решения релятивистских уравнений

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_\alpha, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \quad (1.23)$$

с начальными условиями $\mathbf{p}(0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{r}(0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{r}_0$. Если знать начальную функцию распределения и решение уравнений движения, то функцию распределения в любой момент времени можно вычислить из условия

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_\alpha[0, \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \mathbf{p}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})]. \quad (1.24)$$

Таким образом, самосогласованное нахождение решений уравнений движения (1.23) для всех начальных условий эквивалентно нахождению решения уравнения Власова (1.19). Необходимые для уравнений Максвелла распределения плотностей тока и заряда могут быть вычислены из функций распределения компонент плазмы

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_\alpha Q_\alpha \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{p}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \sum_\alpha Q_\alpha \int \frac{\mathbf{p}}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{p}. \quad (1.26)$$

В случае учета осевой симметрии задачи, перехода к координатам $\xi = t - z$, $\tau = t$ и использования квазистатического приближения подход с использованием функции распределения может быть упрощен. Поскольку мы предполагаем медленность изменения структуры кильватерной волны, производной по τ в уравнении Власова можно пренебречь:

$$\left(1 - \frac{p_z}{\mu_\alpha \gamma_\alpha}\right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi} + \frac{p_r}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.27)$$

В этом случае явная зависимость функции распределения от «нового времени» τ отсутствует, поэтому в качестве начального условия можно выбрать невозмущенное распределение плазмы до воздействия на нее драйвера

$$f_{\alpha,0}(r, \mathbf{p}) = f_\alpha(\xi_{\min}, r, \mathbf{p}). \quad (1.28)$$

Функция распределения для произвольного ξ снова может быть найдена из метода характеристик:

$$f_\alpha[\xi, r(\xi, r_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}(\xi, r_0, \mathbf{p}_0)] = f_{\alpha,0}(r_0, \mathbf{p}_0), \quad (1.29)$$

где $r(\xi, r_0, \mathbf{p}_0)$ — траектории частиц, а $\mathbf{p}(\xi, r_0, \mathbf{p}_0)$ — соответствующие импульсы на траекториях, которые удовлетворяют начальными условиям $r(\xi_{\min}, r_0, \mathbf{p}_0) = r_0$, $\mathbf{p}(\xi_{\min}, r_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$. Уравнения для траекторий будут записаны позже.

В кильватерной волне характерные скорости движения частиц значительно превышают скорость теплового движения, поэтому начальным распределением частиц по импульсам мы пренебрежем и будем считать плазму холодной. Изначальная функция распределения в таком случае может быть записана в виде

$$f_{\alpha,0}(r, \mathbf{p}) = n_\alpha(r)\delta(\mathbf{p}), \quad (1.30)$$

где функция $n_\alpha(r)$ описывает поперечный осесимметричный профиль плазмы. В этом случае можно найти более простые выражения для результирующих плотностей заряда и токов в пространстве для частицы сорта α :

$$\rho_\alpha(\xi, r) = Q_\alpha \int_0^\infty dr_0 \frac{n_\alpha(r_0)}{1 - \beta_z(\xi, r_0)} \delta[r - r(\xi, r_0)], \quad (1.31)$$

$$\mathbf{J}_\alpha(\xi, r) = \frac{Q_\alpha}{\mu_\alpha} \int_0^\infty dr_0 \frac{n_\alpha(r_0)\mathbf{p}(\xi, r_0)}{\gamma_\alpha(\xi, r_0)[1 - \beta_z(\xi, r_0)]} \delta[r - r(\xi, r_0)], \quad (1.32)$$

где $\beta_z = p_z/\gamma_\alpha$. Таким образом, для нахождения функции распределения в квазистатическом приближении необходимо знать траектории частиц $r(\xi, r_0)$ и их импульс на траекториях $\mathbf{p}(\xi, r_0)$. Нахождение траекторий будет рассмотрено далее.

1.2.2 Траектории электронов

Рассмотрим движение частиц плазмы в квазистатическом приближении на примере электронов. На электрон действует сила Лоренца и пондеромоторная сила со стороны лазерного импульса:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{E} - \frac{1}{\gamma} [\mathbf{p} \times \mathbf{B}] - \frac{1}{2\gamma} \nabla \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (1.33)$$

где $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle}$ — Лоренц-фактор электрона. Движение по координатам описывается следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{\gamma}, \quad \frac{d\xi}{dt} = 1 - \frac{p_z}{\gamma}. \quad (1.34)$$

В силу аксиальной симметрии задачи движение по координате ϕ отсутствует.

Система уравнений (1.33) и (1.34) является гамильтоновой, соответствующая функция Гамильтона в переменных $(-\xi, r, \mathbf{P})$ записывается в виде [30]:

$$H(-\xi, r, P_z, P_r) = \gamma(\xi, r, \mathbf{P}) - \varphi(\xi, r) - P_z, \quad (1.35)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \mathbf{A}$ — канонический импульс, φ — электростатический потенциал,

$$\gamma(\xi, r, \mathbf{P}) = \sqrt{1 + (\mathbf{P} + \mathbf{A}(\xi, r))^2 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle(\xi, r)}. \quad (1.36)$$

В записанных переменных в квазистатическом приближении функция Гамильтона (1.35) не зависит явно от времени t , а значит ее значение сохраняется на траекториях частиц. Поскольку электроны плазмы изначально покоятся, а поля и потенциалы при $\xi \rightarrow -\infty$ ($z \rightarrow \infty$) могут быть выбраны равными нулю, то $H = 1$. Если ввести кильватерный потенциал $\Psi = \varphi - A_z$, то

$$H = \gamma - \varphi - P_z = \gamma - \Psi - p_z = 1, \quad (1.37)$$

откуда следует, что на траекториях частиц выполнено соотношение

$$p_z = \gamma - \Psi - 1. \quad (1.38)$$

Таким образом,

$$\frac{d\xi}{dt} = 1 - \frac{p_z}{\gamma} = \frac{1 + \Psi}{\gamma}. \quad (1.39)$$

Зависимость $\xi(t)$ монотонна в силу того, что частица не может двигаться быстрее скорости света, поэтому ξ можно использовать вместо времени в качестве параметра траектории, при этом уравнение (1.39) определяет преобразование от дифферен-

цирования по t к дифференцированию по ξ . Переход от переменной времени к переменной ξ позволяет найти уравнение для траектории электрона. Требование положительности $d\xi/dt$ автоматически ограничивает величину кильватерного потенциала Ψ снизу значением -1 .

Используем определение Лоренц-фактора и соотношение (1.38) для нахождения γ через другие величины:

$$\gamma^2 = 1 + p_r^2 + (\gamma - \Psi - 1)^2 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (1.40)$$

откуда можно легко получить

$$\gamma = \frac{1 + (1 + \Psi)^2 + p_r^2 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{2(1 + \Psi)}. \quad (1.41)$$

Далее запишем уравнение для поперечного импульса:

$$\frac{dp_r}{d\xi} = \frac{\gamma}{1 + \Psi} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\gamma}{1 + \Psi} E_r + \frac{p_z}{1 + \Psi} B_\phi - \frac{1}{2(1 + \Psi)} \frac{\partial}{\partial r} \langle \mathbf{a}^2 \rangle. \quad (1.42)$$

Учитывая (1.8), (1.38), (1.41) и уравнение

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{p_r}{1 + \Psi}, \quad (1.43)$$

в итоге получим

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 + \Psi) \frac{dr}{d\xi} \right] = \left[\frac{1 + (1 + \Psi)^2}{2(1 + \Psi)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right] \frac{\partial \Psi}{\partial r} - B_\phi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\langle \mathbf{a}^2 \rangle}{1 + \Psi}. \quad (1.44)$$

Данное уравнение второго порядка позволяет найти решение $r(\xi, r_0)$ для траектории частицы с начальными условиями

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} r(\xi, r_0) = r_0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (1.45)$$

в заданных электромагнитных полях. Подстановка всех таких траекторий в уравнения (1.31, 1.32) позволяет рассчитать распределение плотности заряда и тока в пространстве.

Аналогичным образом можно получить уравнение для траекторий ионов плазмы. Однако, поскольку масса ионов значительно превышает массу электронов, их движением мы пренебрежем и будем полагать их покоящимися:

$$\rho_i(\xi, r) = \rho_i(r) \propto n(r), \quad \mathbf{J}_i = 0. \quad (1.46)$$

Очевидно, что использованное приближение о независимости функции Гамильтона H от времени t справедливо, только если время движения электрона по траектории мало по сравнению с характерным временем эволюции полей \mathbf{B} и \mathbf{E} и огибающей лазерного импульса $\langle \mathbf{a}^2 \rangle$. Это условие выполнено для большинства электронов и ионов плазмы на масштабах порядка нескольких плазменных длин волн позади драйвера. Таким образом, уравнение для траекторий электронов (1.44) может быть использовано для самосогласованного нахождения электронной плотности $\rho_e(\xi, r)$ в кильватерной волне. Однако, для релятивистского электронного драйвера и ускоряемых в кильватерной волне заряженных частиц, продольная скорость которых близка к скорости света и распределение плотности заряда которых описывается функцией $\rho_B(\xi, r)$, движение по ξ является очень медленным, поэтому для них описание в рамках квазистатического подхода неприменимо. Кроме того, процесс самоинжекции, при котором часть электронов плазмы ускоряются до скоростей, достаточных для их захвата в волну, также не описывается в рамках этого приближения. Тем самым, в рамках квазистатического приближения частицы делятся на два независимых «сорта»: частицы плазмы, для которых рассчитываются траектории, и релятивистские частицы, движущиеся вместе с кильватерной волной, для которых нужно отдельное описание.

Рассмотрим движущийся вдоль оси z сгусток произвольных заряженных частиц (электронов, позитронов, ионов) с плотностью заряда $\rho_B(\xi, r)$ и Лоренц-фактором $\gamma_0 \gg 1$, которому соответствует скорость $v_0 \approx 1$. Соответствующая этому сгустку продольная плотность тока $J_{B,z} = v_0 \rho_B \approx \rho_B$ совпадает с плотностью заряда. Поскольку характерное время эволюции таких сгустков обычно велико, с точки зрения уравнений (1.14, 1.15) распределение ρ_B можно считать заданным извне. Таким образом, в рамках квазистатического приближения самосогласованное нахождение распределения плотности заряда сгустков не требуется. Движение релятивистских электро-

нов будет рассмотрено отдельно в главе 3.

1.3 Выводы

В этой главе приведен метод самосогласованного описания кильватерной волны в плазме, возбуждаемой лазерным импульсом или сгустком заряженных частиц. Было предложено описание для трех слагаемых, входящих в пространственные распределения плотности заряда ρ и плотности тока J_z . В приближении неподвижности ионов плотность их заряда $\rho_i(r)$ считается заданной и однородной по продольной координате, при этом их вклад в плотность тока нулевой. Плотности заряда ρ_e и тока J_e электронов плазмы могут быть найдены путем решения уравнения (1.44) и использования уравнений (1.31, 1.32). Плотности заряда ρ_B и тока $J_B \approx \rho_B$ релятивистских сгустков считаются заданными функциями. Совместное самосогласованное решение уравнений (1.16, 1.17, 1.44) позволяет полностью решить задачу о возбуждении произвольной кильватерной волны драйвером в квазистатическом приближении. Напрямую такой подход применяется в многочисленных квазистатических численных кодах, основанных на методе частиц в ячейках, причем как в аксиально симметричных [30; 124; 125], так и в полностью трехмерных [126; 127]. При отсутствии пересечения траекторий описание при помощи функции распределения можно также свести к гидродинамическому описанию, в котором уравнение для функции распределения (1.19) заменяется уравнениями для ее моментов [128]. Иногда удается получить аналитическое решение уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла; в частности, в случае квазилинейной кильватерной волны [31]. Но в сильно нелинейном режиме гидродинамическое описание несправедливо.

Стоит также отметить, что использование квазистатического подхода не позволяет нам рассматривать достаточно важный процесс самоинжекции электронов, при котором электроны плазмы захватываются в кильватерную волну и ускоряются в ней. При этом процессе невозможно провести четкую границу между плотностью электронов плазмы ρ_e , описываемую функцией распределения, и плотностью релятивистских сгустков ρ_B , полагаемой заданной, поскольку осуществляется обмен частицами между этими двумя категориями. Для описания подобных процессов необходимо пользоваться полными уравнениями.

2 Теория сильно нелинейного режима кильватерной волны в плазме с поперечной неоднородностью

2.1 Модель плазменной полости

Самосогласованное описание режима плазменной полости с использованием уравнений Максвелла и уравнений движения частиц, описанное в главе 1, представляет большие трудности и на данный момент возможно только с использованием численных методов. Поэтому для возможности дальнейшего теоретического исследования мы будем разрабатывать феноменологическую теорию этого режима, в рамках которого распределение источников ρ и J_z не будет находиться полностью самосогласованным образом. Вместо этого для данных источников будет использована феноменологическая модель, основанная на результатах численного моделирования методом частиц в ячейках.

Типичная плазменная полость, наблюдаемая в моделировании, показана на Рис. 2(a). Из распределения электронной плотности видно, что существует очень резкая граница между областью, в которой отсутствуют электроны плазмы, и электронным слоем. Поэтому эту границу мы будем считать линией, описываемой функцией $r_b(\xi)$. Пространство будет разграничено на области внутри плазменной полости ($r < r_b$) и снаружи нее ($r > r_b$). Непосредственно на границе плазменной полости образуется достаточно тонкий электронный слой.

Зададим модель для источника $J_z - \rho$, опираясь на результаты моделирования для этой разности (Рис. 2(b, e)). Внутри плазменной полости нет электронов плазмы: $\rho_e = 0$, поэтому плотность заряда внутри полости составляется из суммы плотности заряда электронных сгустков ρ_B и плотности заряда ионов ρ_i . Поскольку ионы неподвижны, продольная компонента тока включает в себя лишь компоненту, связанную с током электронных сгустков $J_{B,z} \approx \rho_B$. Таким образом, в разность $J_z - \rho \approx -\rho_i$ релятивистские электронные сгустки не вносят вклада. Это отчетливо видно на Рис. 2(b), на котором практически не заметен электронный драйвер. В то

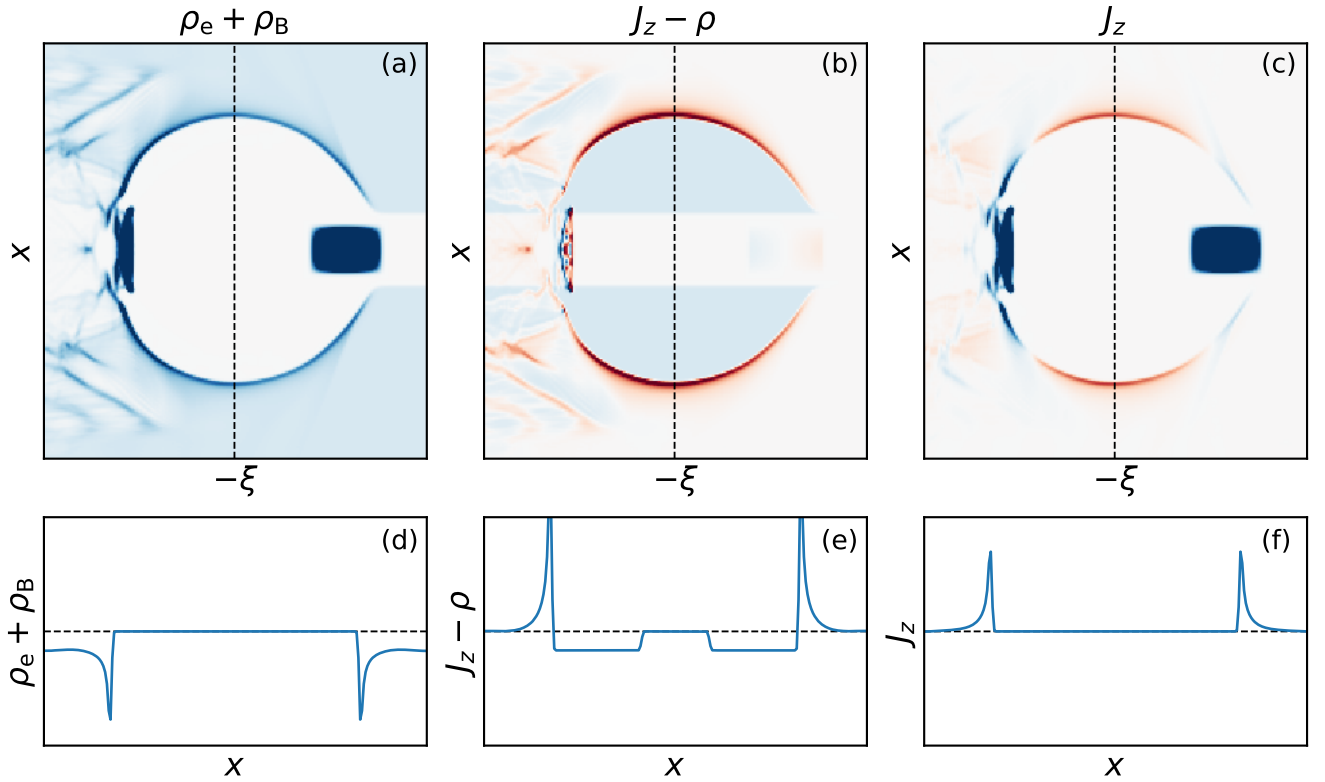


Рис. 2: Результаты численного моделирования плазменной полости, возбуждаемой электронным сгустком в плазме с полым каналом. Распределения в пространстве (a) плотности заряда электронов (включая драйвер), (b) разности $J_z - \rho$, (c) продольной компоненты плотности тока J_z . На рисунках (d–f) показаны те же распределения в поперечном сечении, показанном на рисунках (a–b) штриховой линией. Полый канал виден на рисунке (a) перед драйвером, а также на рисунках (b, e), где соответствует участку $J_z - \rho = 0$ внутри плазменной полости.

же время, драйвер явно различим на Рис. 2(a, c). Снаружи плазменной полости источник $J_z - \rho$ быстро спадает к нулю. Замеченные особенности $J_z - \rho$ можно описать следующей моделью:

$$J_z - \rho = \begin{cases} -\rho_i(r), & r < r_b(\xi), \\ S_0(\xi)g\left(\frac{r - r_b(\xi)}{\Delta}\right), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (2.1)$$

Функция $g(X)$, спадающая к нулю при росте X , описывает профиль электронного слоя на границе полости, постоянная величина Δ — характерную его толщину, а $S_0(\xi)$ отвечает амплитуде. Мы полагаем, что функция g нормирована таким образом,

что $M_0(0) = M_1(0) = 1$, где

$$M_n(X) = \int_X^\infty g(Y)Y^n dY \quad (2.2)$$

являются обобщенными моментами функции g . Подобной нормировки всегда можно добиться путем домножения $S_0(\xi)$ и Δ на некоторые постоянные множители. В качестве примеров функций g , использованных в предшествующих работах (см., например, [95; 98]), можно привести $g = \exp(-X)$, описывающую экспоненциальное спадание профиля, и $g(X) = \theta(2 - X)/2$, описывающую простой прямоугольный профиль электронного слоя. Здесь $\theta(X)$ — степ-функция Хевисайда.

Из условия сходимости интеграла в выражении (1.17) для кильватерного потенциала Ψ можно найти

$$S_0(\xi) = \frac{S_i(r_b(\xi))}{\Delta[r_b(\xi) + \Delta]}, \quad (2.3)$$

где

$$S_i(r) = \int_0^r \rho_i(r')r' dr' \quad (2.4)$$

является функцией, определяемой только профилем плотности плазмы. Например, для однородной плазмы $\rho_i = 1$ эта функция равна $r^2/2$.

Как показывает моделирование (Рис. 2(с)), продольный ток J_z проявляет схожее с $J_z - \rho$ поведение, поэтому мы используем аналогичную модель:

$$J_z(\xi, r) = \begin{cases} \rho_B(\xi, r), & r < r_b(\xi), \\ J_0(\xi)g_J\left(\frac{r - r_b(\xi)}{\Delta_J}\right), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (2.5)$$

Внутри плазменной полости в продольную компоненту тока вносят вклад только релятивистские электронные сгустки $J_{z,B} \approx \rho_B$. В общем случае типичная толщина электронного слоя Δ_J для функции J_z может не совпадать с шириной Δ . В целях общности введена и отличная от $g(X)$ функция $g_J(X)$, которая нормализована таким же образом, как $g(X)$, т. е. ее моменты $M_{J,0}(0) = M_{J,1}(0) = 1$. Амплитуда $J_0(\xi)$ может быть найдена из граничного условия спадания азимутального магнитного поля $\lim_{r \rightarrow \infty} rB_\phi = 0$, что будет продемонстрировано в разделе 2.3.

Таким образом, модель плазменной полости полностью задается функцией

$r_b(\xi)$, описывающей положение ее границы, а также функциями $g(X)$, $g_J(X)$ с характерными толщинами Δ , Δ_J , которые описывают электронный слой на ее границе. Зная только лишь эти три функции, мы можем рассчитать полное распределение электромагнитного поля в пространстве. В общем случае, параметры электронного слоя можно подобрать эмпирически на основе результатов численного моделирования. Однако, для функции $r_b(\xi)$ может быть найдено уравнение, которое позволяет найти эту функцию аналитически, что будет продемонстрировано в следующем разделе.

2.2 Уравнение для границы плазменной полости

В разделе 1.2 было получено общее уравнение (1.44), описывающее траекторию электрона плазмы. Из результатов численного моделирования следует, что почти все электроны плазмы движутся внутри электронного слоя на границе плазменной полости вдоль границы, при этом сама граница $r_b(\xi)$ тоже является траекторией электрона. Это означает, что уравнение (1.44) для траекторий электронов в плазме может быть применено для описания границы. Для этого в него необходимо подставить значения полей в кильватерной волне на границе r_b . Всего для использования уравнения (1.44) понадобится найти Ψ , $\partial\Psi/\partial\xi$, $\partial\Psi/\partial r$ и B_ϕ на границе плазменной полости. Вычислим их, пользуясь введенной нами моделью плазменной полости.

Сначала найдем распределение потенциала Ψ в пространстве, используя уравнение (1.17) с учетом постулированной нами модели плазменной полости (2.1). Для $r > r_b$ получим

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, r) &= \int_r^\infty \frac{dr'}{r'} \left[S_i(r_b) - \frac{S_i(r_b)}{\Delta(r_b + \Delta)} \int_{r_b}^{r'} r'' g\left(\frac{r'' - r_b}{\Delta}\right) dr'' \right] = \\ &= \frac{\epsilon S_i(r_b)}{1 + \epsilon} \int_R^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1 + \epsilon R'} dR', \quad (2.6) \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$R = R(r, r_b) = \frac{r - r_b}{\Delta}, \quad \epsilon = \epsilon(r_b) = \frac{\Delta}{r_b}. \quad (2.7)$$

Для $r < r_b$, будем иметь

$$\Psi(\xi, r) = \int_r^{r_b} \frac{S_i(r')}{r'} dr' + S_i(r_b)\beta(r_b), \quad (2.8)$$

где

$$\beta(r_b) = \frac{\epsilon(r_b)}{1 + \epsilon(r_b)} \int_0^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon(r_b)M_1(R')}{1 + \epsilon(r_b)R'} dR'. \quad (2.9)$$

Таким образом, $\Psi(\xi, r_b) = S_i(r_b)\beta(r_b)$. Важно, что под r_b всюду подразумевается функция $r_b(\xi)$.

Для нахождения частных производных кильватерного потенциала Ψ при $r = r_b$ будем использовать предел при стремлении к r_b снизу, который совпадает с пределом сверху в силу гладкости функции Ψ . Внутри плазменной полости ($r < r_b$) производная от Ψ по поперечной координате

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r}(\xi, r) = -\frac{S_i(r)}{r}, \quad (2.10)$$

в то время как производная по продольной координате

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\xi, r) = \left(\frac{S_i(r_b)}{r_b} + S_i'(r_b)\beta(r_b) + S_i\beta'(r_b) \right) r_b'. \quad (2.11)$$

Из этих выражений также видно, что внутри плазменной полости радиальная производная не зависит от продольной координаты, а продольная производная — от поперечной. Как будет показано в главе 3, эти производные соответствуют силам, действующим на ускоряемые в полости частицы, поэтому это свойство производных важно с точки зрения физики ускорения.

После нахождения потенциала и его производных остается найти магнитное поле на границе $B_\phi(\xi, r_b)$. Для этого используем (1.18). Тогда

$$B_\phi(\xi, r_b) = \frac{r_b}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}(\xi, r_b) - \frac{\lambda(\xi)}{r_b}, \quad (2.12)$$

где

$$\lambda(\xi) = - \int_0^{r_b} \rho_B(\xi, r') r' dr'. \quad (2.13)$$

Первый член в (2.12) получен с использованием независимости $\partial^2\Psi/\partial\xi^2$ от координаты r внутри плазменной полости (при $r < r_b$). Функция $\lambda(\xi)$, в силу отсутствия электронов плазмы внутри плазменной полости, определяется только лишь релятивистскими электронными сгустками внутри полости (либо возбуждающими ее, либо ускоряемыми в ней). При использовании только электронов она является знакоположительной. Вообще говоря, в общем случае эта функция зависит от ξ как явно в силу зависимости от плотности заряда сгустков $\rho_B(\xi, r)$, так и через зависимость от ξ верхнего предела интегрирования $r_b(\xi)$. Однако, если электронные сгустки находятся полностью внутри плазменной полости, т. е. $\rho_B = 0$ при $r > r_b$, то предел r_b в (2.13) можно заменить на бесконечность и функция $\lambda(\xi)$ перестает зависеть от формы границы полости r_b :

$$\lambda(\xi) = - \int_0^\infty \rho_B(\xi, r') r' dr'. \quad (2.14)$$

Это свойство независимости функции λ от r_b понадобится нам при дальнейших вычислениях.

Поскольку все величины, которые необходимо подставить в уравнение (1.44) для нахождения уравнения для $r_b(\xi)$ найдены, перейдем к рассмотрению этого уравнения. Левая часть уравнения (1.44) для траектории $r_b(\xi)$ преобразуется в

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [(1 + \Psi)r_b'] &= (1 + \Psi)r_b'' + \frac{\partial\Psi}{\partial r} r_b'^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} r_b' = \\ &= (1 + S_i\beta)r_b'' - \frac{S_i}{r_b} r_b'^2 + \left(\frac{S_i}{r_b} + S_i'\beta + S_i\beta' \right) r_b'^2 = \\ &= (1 + S_i\beta)r_b'' + (S_i'\beta + S_i\beta') r_b'^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Нетрудно заметить, что правая часть (1.44) будет содержать члены, пропорциональные r_b'' , $r_b'^2$, а также члены, не содержащие производной от r_b . Таким образом, примененное к границе плазменной полости уравнение (1.44) сведется к виду

$$A(r_b) \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + B(r_b) \left(\frac{d r_b}{d\xi} \right)^2 + C(r_b) = \lambda(\xi) + L(\xi, r_b). \quad (2.16)$$

Как уже было отмечено ранее, функция $\lambda(\xi)$, описывающая электронные сгустки

внутри плазменной полости, для простоты полагается независимой от функции $r_b(\xi)$. Член $L(\xi, r_b)$ описывает влияние лазерного импульса на границу плазменной полости. Таким образом, уравнение (2.16) описывает эволюцию границы плазменной полости с учетом воздействия на нее находящихся в ней электронных сгустков, а также лазерного импульса. Коэффициенты этого уравнения имеют следующий вид:

$$A(r_b) = \frac{r_b}{2} (2 + S_i + 2S_i\beta + S_i'\beta r_b + S_i\beta' r_b), \quad (2.17)$$

$$B(r_b) = \frac{r_b}{2} (S_i' + 2S_i'\beta + 2S_i\beta' + S_i''\beta r_b + 2S_i'\beta' r_b + S_i\beta'' r_b), \quad (2.18)$$

$$C(r_b) = S_i \frac{1 + (1 + S_i\beta)^2}{2(1 + S_i\beta)^2}, \quad (2.19)$$

$$L(\xi, r_b) = -\frac{r_b}{2(1 + S_i\beta)} \frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial r}(\xi, r_b) - \frac{S_i}{2(1 + S_i\beta)^2} \langle \mathbf{a}^2 \rangle(\xi, r_b). \quad (2.20)$$

В дальнейшем мы не будем учитывать слагаемое L , предполагая, что уравнение используется в области пространства, где лазерное поле отсутствует. Всюду у функций S_i , β и их производных аргументом является r_b . Коэффициенты A , B , C зависят как от профиля плазмы (посредством функции S_i), так и от свойств электронного слоя на границе (посредством функции β).

Профиль плазмы, а следственно и функция S_i , определяются условиями задачи, однако свойства электронного слоя в нашей модели (2.1) постулируются и не могут быть определены исходя из условий задачи. В связи с этим важным является определить, насколько сильно свобода выбора параметров электронного слоя может влиять на уравнение для границы плазменной полости.

2.2.1 Влияние профиля электронного слоя

Рассмотрим свойства функции $\beta(r_b)$, задаваемой выражением (2.9), для различных профилей электронного слоя $g(X)$. Во-первых, заметим, что функция β зависит только от функции $\epsilon(r_b) = \Delta/r_b$ и не содержит зависимости от r_b в другой форме, поэтому мы можем рассматривать поведение альтернативной функции:

$$\hat{\beta}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \int_0^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1 + \epsilon R'} dR', \quad (2.21)$$

которая очевидным образом связана с исходной: $\beta(r_b) = \hat{\beta}(\Delta/r_b)$. Во-первых, легко заметить, что при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\hat{\beta}(\epsilon) \approx \epsilon \int_0^\infty M_0(R') dR' = \epsilon M_1(0) = \epsilon. \quad (2.22)$$

Таким образом, если аргумент ϵ мал, что соответствует малости толщины электронного слоя Δ по сравнению с радиусом плазменной полости r_b , функция $\hat{\beta}$ линейна по нему и не зависит от свойств функции $g(X)$, описывающей профиль электронного слоя.

Рассмотрим, насколько сильно отличие функций $\hat{\beta}$ для двух частных случаев профиля плазмы: экспоненциального профиля $g(X) = \exp(-X)$ и прямоугольного профиля $g(X) = \theta(2 - X)/2$, использованных в предшествующих моделях [95; 98]. Обобщенные моменты (2.2) функции g для экспоненциального профиля

$$M_0(X) = \exp(-X), \quad M_1(X) = (1 - X) \exp(-X), \quad (2.23)$$

а для прямоугольного

$$M_0(X) = \frac{2 - X}{2} \theta(2 - X), \quad M_1(X) = \frac{4 - X^2}{4} \theta(2 - X). \quad (2.24)$$

Соответствующие функции $\hat{\beta}(\epsilon)$ показаны на Рис. 3. Из этих рисунков видно, что, несмотря на очень сильное различие между формой слоя в экспоненциальной и прямоугольной модели, функция $\hat{\beta}(\epsilon)$, а следовательно и $\beta(r_b)$, входящая в уравнение (2.16) для формы плазменной полости, очень слабо изменяется при замене формы слоя. Это позволяет рассчитывать на то, что наша модель, несмотря на наличие произвола в выборе формы электронного слоя, будет корректно описывать форму реальной плазменной полости, даже если выбранная нами форма слоя плохо соответствует реальной.

2.2.2 Приближение бесконечно тонкого слоя

В общем случае для произвольных параметров плазменной полости и электронного слоя, уравнение (2.16) может быть решено численно. Однако, существует два предельных случая, при которых это уравнение можно в значительной степени

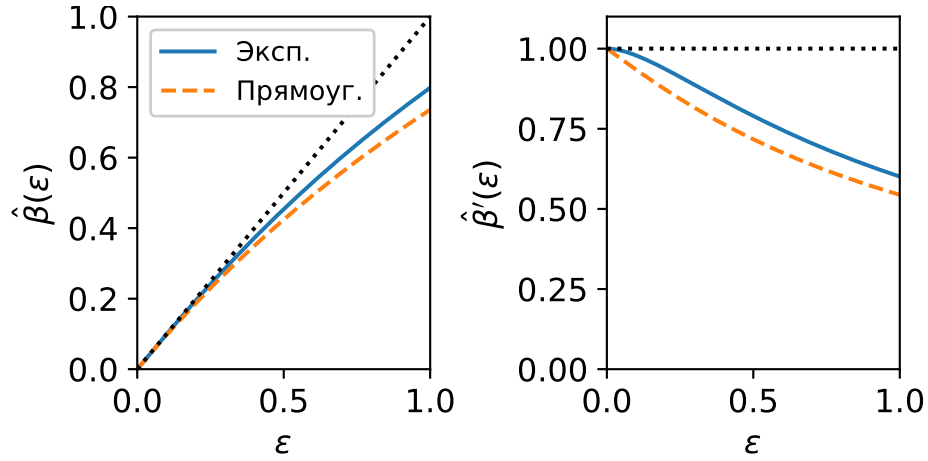


Рис. 3: Графики функций $\hat{\beta}(\epsilon)$ и их производных $\hat{\beta}'(\epsilon)$ для экспоненциального (сплошная линия) и прямоугольного (штриховая линия) профилей электронного слоя. Пунктирной линией показано решение $\hat{\beta}(\epsilon) = \epsilon$ в приближении $\epsilon \ll 1$.

упростить.

Предположим, что толщина электронного слоя на границе плазменной полости бесконечно мала ($\Delta \rightarrow 0$). Это отвечает тому, что функция $\epsilon(r_b) = \Delta/r_b$ также стремится к нулю. Как нами показано ранее, при $\epsilon \rightarrow 0$ функция $\beta(r_b) \approx \epsilon$. Таким образом, величиной β также можно пренебречь. Нетрудно показать, что все производные функции β также пропорциональны ϵ и тем самым являются бесконечно малыми. Тогда коэффициенты (2.17–2.19) сильно упрощаются, и уравнение (2.16) принимает вид

$$\left(1 + \frac{S_i(r_b)}{2}\right) r_b \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + \frac{\rho_i(r_b) r_b^2}{2} \left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + S_i(r_b) = \lambda(\xi). \quad (2.25)$$

Важно, что в данном приближении коэффициенты уравнения перестают зависеть как от формы электронного слоя $g(X)$, так и от его толщины Δ , и определяются лишь профилем плазмы, от которого зависит функция $S_i(r)$. В частности, при использовании однородной плазмы $\rho_i(r) = 1$ данное уравнение выглядит следующим образом:

$$\left(1 + \frac{r_b^2}{4}\right) r_b \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + \frac{r_b^2}{2} \left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + \frac{r_b^2}{2} = \lambda(\xi). \quad (2.26)$$

Стоит отметить, что уравнение в приближении бесконечно тонкого слоя можно получить более простым способом, изначально предположив, что электронный слой на границе плазменной полости описывается дельта-функцией $g(X) = \delta(X)$.

Поскольку ширина дельта-функции по определению бесконечно мала, в этом случае значение Δ ни на что не влияет.

2.2.3 Релятивистское приближение

Рассмотрим другой предельный случай. Предположим, что толщина электронного слоя на границе плазменной полости мала по сравнению с размером полости, т. е. $\Delta \ll r_b$. Тогда функция $\epsilon = \Delta/r_b \ll 1$, и справедливо приближение $\beta(r_b) \approx \epsilon(r_b)$. Однако, в отличие от предыдущего случая предположим, что

$$S_i(r_b)\beta \approx S_i\epsilon \gg 1, \quad (2.27)$$

то есть $S_i/r_b \gg \Delta^{-1}$. Поскольку S_i/r_b для типичных профилей плазмы растет с ростом размера плазменной полости, это соответствует предположению о том, что плазменная полость является достаточно большой. С учетом выражения (1.41) для Лоренц-фактора γ и равенства $\Psi = S_i\beta$ на границе плазменной полости (см. (2.8)) это неравенство также соответствует приближению $\gamma \gg 1$ для электрона, движущегося внутри электронного слоя. Таким образом, релятивистское приближение справедливо, если электроны в электронном слое являются сильно релятивистскими, что и обуславливает его название.

В рамках этого приближения уравнение (2.16) запишется как:

$$S_i r_b \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + S_i' r_b \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 + S_i = 2\lambda(\xi). \quad (2.28)$$

Это уравнение, как и уравнение (2.25), не зависит как от формы электронного слоя $g(X)$, так и от его толщины Δ . Среди отличий от уравнения (2.25) можно отметить в два раза меньший коэффициент C , а также отсутствие единицы в коэффициенте A , поскольку ей необходимо пренебречь при $S_i \gg 1$. Для однородной плазмы в этом приближении получится следующее хорошо известное простое уравнение:

$$r_b r_b'' + 2r_b'^2 + 1 = \frac{4\lambda(\xi)}{r_b^2}, \quad (2.29)$$

которое впервые было получено в работах [95; 96].

2.2.4 Область применимости приближений

Важным является понять, в какой области параметров справедливо каждое из найденных приближений. Для этого проведем сравнение коэффициентов A , B и C , полученных в рамках релятивистского приближения и приближения бесконечно тонкого слоя, с их истинными значениями (2.17–2.19). В качестве примера плазмы используем однородную плазму $\rho_i(r) = 1$, а при описании электронного слоя будем полагать его форму экспоненциальной $g(X) = \exp(-X)$. Как уже было показано ранее, выбор функции g не сильно влияет на значения коэффициентов. При использовании плазмы с другими профилями концентрации выводы качественно также не изменятся. В результате при заданном профиле плазмы и профиле электронного слоя истинное значение коэффициентов будет зависеть от выбранной толщины электронного слоя Δ и текущего значения r_b , а значения коэффициентов в рассматриваемых нами приближениях — лишь от значения r_b . Для количественной оценки ошибки вычисления коэффициентов в сделанных нами приближениях будет использовать функцию

$$D(a, b) = 2 \left| \frac{a - b}{a + b} \right|, \quad (2.30)$$

количественно оценивающую разность между величинами a и b . Для знакоопределенных величин она принимает значения от 0 (при полном совпадении значений) до 2 (при очень большом отличии).

Построим на плоскости Δ, r_b распределения ошибок вычисления коэффициентов для двух приближений. Из-за наличия в задаче только одного пространственного масштаба (плазменной длины волны) ожидаемо, что толщина электронного слоя на границе полости по порядку величины соразмерна с ней. В то же время размер плазменной полости может быть значительно больше толщины электронного слоя, что было использовано нами в приближениях. Поэтому параметр Δ на плоскости параметров мы будем варьировать от 0 до 1, а размер полости r_b — от 0 до 20. Для коэффициента A , определяемого формулой (2.17), зависимость ошибки его вычисления в двух приближениях от толщины слоя Δ и размера полости r_b показана на Рис. 4. Из данного рисунка следует, что наличие дополнительного единичного слагаемого в A в приближении бесконечно тонкого слоя более точно описывает дей-

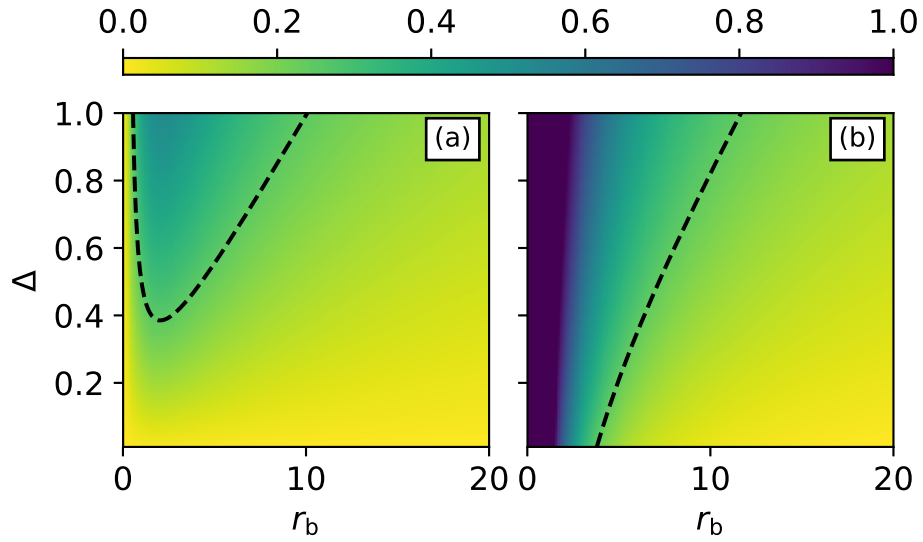


Рис. 4: Относительная ошибка вычисления коэффициента A (a) в приближении бесконечно тонкого слоя $A = r_b(1 + r_b^2/4)$ и (b) в релятивистском приближении $A = r_b^3/4$ при сравнении с истинным значением (2.17). Штриховой линией показан уровень 0.25.

ствительную зависимость A от радиуса плазменной полости для малых значений Δ . В то же время, при толщине электронного слоя $\Delta \gtrsim 0.4$ разница между приближениями становится несущественной. Коэффициент B в обоих приближениях задается одинаковой формулой $B = r_b^2/2$, отличие которой от истинного значения (2.18) показано на Рис. 5. Сделанные приближения вносят серьезную ошибку при вычислении этого коэффициента только при очень малых величинах r_b . Наиболее существенно в двух приближениях отличается коэффициент C , истинное значение которого задается формулой (2.19). Для приближения бесконечно тонкого слоя (Рис. 6(a)) расчет этого коэффициента оказывается справедливым только в малом диапазоне параметров для малых Δ и r_b , в то время как релятивистское приближение (Рис. 6(b)), напротив, оказывается справедливым для достаточно больших значений r_b .

Если учесть ошибки во всех трех коэффициентах и оценить общую ошибку для каждого из приближений (для чего можно использовать корень из суммы квадратов ошибок отдельных коэффициентов), то можно получить области параметров, при которых оправдано использование того или иного приближения. Данные области показаны на Рис. 7. Можно сделать вывод, что приближение тонкого слоя может быть справедливым, только если характерная толщина слоя $\Delta \lesssim 0.1$. Несмотря на то что здесь приведены расчеты для однородной плазмы, для плазмы с поперечной

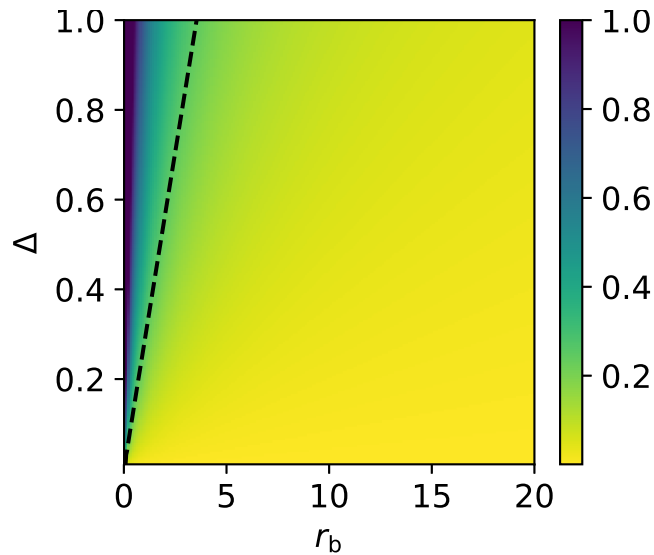


Рис. 5: Относительная ошибка вычисления коэффициента B в обоих приближениях ($B = r_b^2/2$) при сравнении с истинным значением (2.18). Штриховой линией показан уровень 0.25.

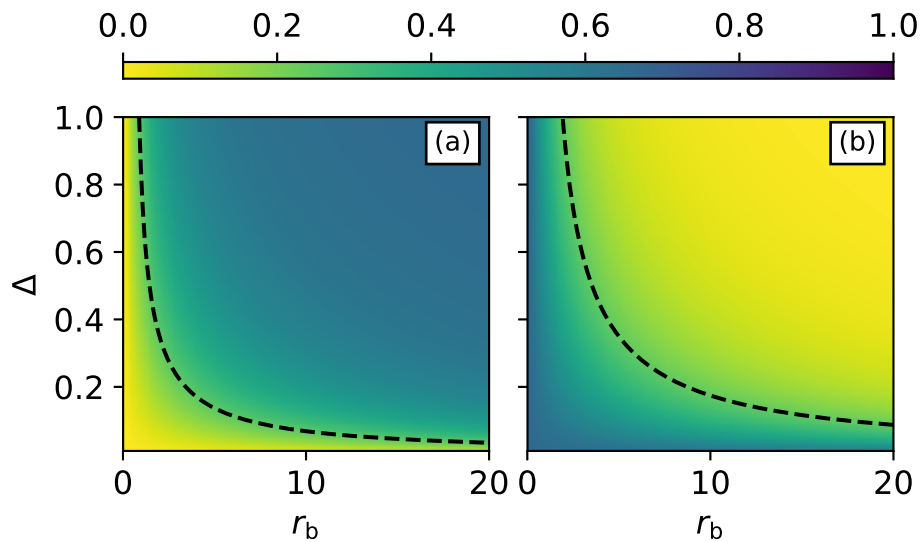


Рис. 6: Относительная ошибка вычисления коэффициента C (a) в приближении бесконечно тонкого слоя $C = r_b^2/2$ и (b) в релятивистском приближении $C = r_b^2/4$ при сравнении с истинным значением (2.19). Штриховой линией показан уровень 0.25.

неоднородностью выводы будут схожими.

К настоящему моменту в численном моделировании не наблюдались плазменные полости в области параметров, для которых было бы справедливо приближение бесконечно тонкого слоя. Обычно наблюдаемые значения Δ оказываются существенно большими, поэтому возможность наблюдения режима бесконечно тонкого слоя в реальности сомнительна. С другой стороны, релятивистское

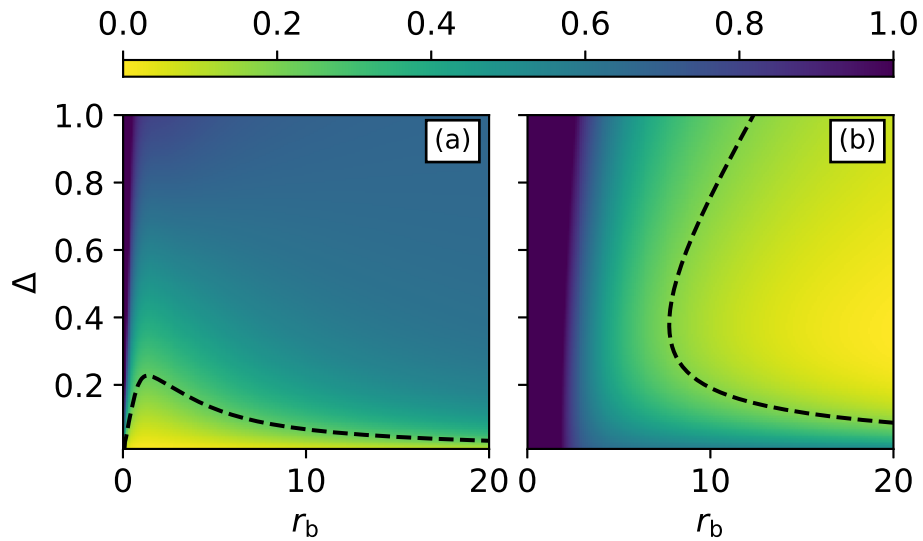


Рис. 7: Корень суммы квадратов ошибок вычисления коэффициентов A , B , C для (а) приближения бесконечно тонкого слоя и (б) релятивистского приближения. Штриховой линией показан уровень 0.25.

приближение оказывается хорошо применимым при размере плазменной полости $r_b \gtrsim 10$ (Рис. 7(b)) для ожидаемых нами значений толщины электронного слоя, поэтому хорошо описывает результаты численных расчетов. Для демонстрации применимости релятивистского приближения было проведено численное моделирование

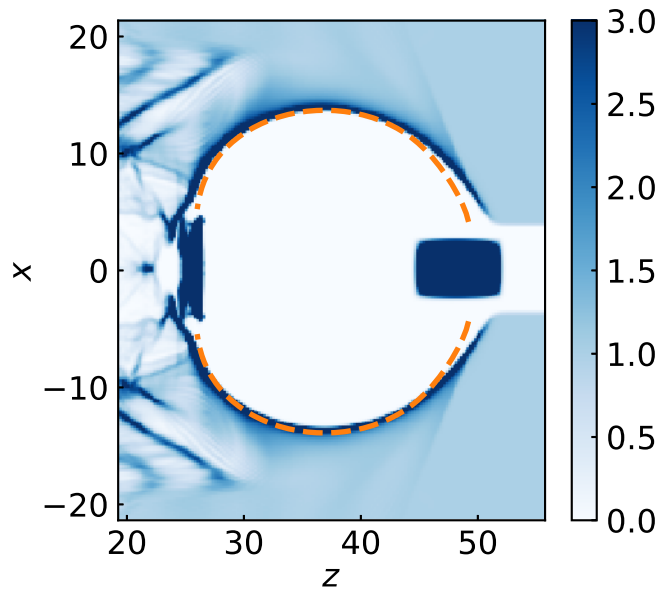


Рис. 8: Распределение электронной плотности в плазменной полости, возбуждаемой релятивистским электронным сгустком в плазме с полым каналом. Граница плазменной полости, вычисленная по формуле (2.28) в релятивистском приближении, показана штриховой линией. Все линейные размеры нормированы на $k_p^{-1} = \lambda_p/2\pi$.

методом частиц в ячейках с использованием полностью трехмерного численного кода Smilei [129; 130]. В моделировании для возбуждения плазменной полости в плазме с полым каналом радиуса $r_c = 1.2\pi$ использовался электронный сгусток с параболическим профилем плотности с поперечным размером $\sigma_{B,r} = 1.6\pi$, продольным размером $\sigma_{B,z} = 2.4\pi$, полным зарядом 6.4 нКл и энергией электронов 2 ГэВ. Подобная достаточно большая энергия выбрана для того, чтобы эволюция электронного драйвера на времени моделирования была минимальной. Сравнение результатов моделирования с описанием границы в релятивистском приближении показано на Рис. 8. Оцененная толщина электронного слоя в моделировании составляла $\Delta \approx 0.75$ при максимальном размере плазменной полости $\max r_b \approx 13.8$, что соответствует области применимости релятивистского приближения (Рис. 7(b)). Незначительные расхождения моделирования с теорией наблюдаются в передней и задней частях плазменной полости, где размер плазменной полости r_b становится меньше и справедливость релятивистского приближения нарушается.

Таким образом, показано, что уравнение (2.28) в релятивистском приближении хорошо подходит для описания формы плазменной полости. Поскольку оно намного проще полного уравнения (2.16), в последующих разделах мы будем пользоваться только этим приближенным уравнением.

2.3 Электромагнитное поле в плазменной полости

Для задач инжекции и самоинжекции заряженных частиц в плазменную полость важно знать распределение электромагнитного поля в пространстве как снаружи плазменной полости, так и внутри нее. В общем случае, построенная нами теория позволяет находить распределение полей с использованием следующего алгоритма:

1. задать функции $g(X)$, $g_J(X)$ и параметры Δ , Δ_J , описывающие форму и толщину электронного слоя на границе (в частности, эти параметры можно подобрать на основе численного моделирования);
2. решить уравнение для границы плазменной полости (2.16);
3. используя модели (2.1, 2.5), найти распределения $J_z - \rho$ и J_z в пространстве; вычислить распределение кильватерного потенциала в пространстве, пользуясь

формулой (1.17);

4. вычислить распределения компонент электромагнитного поля, пользуясь формулами (1.7, 1.8, 1.18).

Однако, данный подход требует большого количества вычислений, которые в общем случае могут быть сделаны только лишь численно.

Как было показано в разделе 2.2, использование приближения малости толщины электронного слоя Δ по сравнению с размером плазменной полости r_b существенно упрощает получаемые выражения. Оказывается, что данное приближение позволяет найти и более простой способ вычисления компонент электромагнитного поля. Для этого введем два параметра $\epsilon = \Delta/r_b$ и $\epsilon_J = \Delta_J/r_b$, которые будем предполагать малыми, и будем разлагать выражения для полей в ряд Тейлора по данным параметрам, оставляя лишь члены наиболее высокого порядка. Также мы будем предполагать, что граница плазменной полости описывается уравнением в релятивистском приближении (2.28).

2.3.1 Кильватерный потенциал

Общие выражения для кильватерного потенциала (2.6, 2.8) уже были получены в разделе 2.2. В силу их важности для дальнейших вычислений, приведем их здесь еще раз. Для $r > r_b$

$$\Psi = \frac{\epsilon S_i(r_b)}{1 + \epsilon} \int_R^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1 + \epsilon R'} dR', \quad (2.31)$$

где $R = (r - r_b)/\Delta$, а для $r < r_b$

$$\Psi = \int_r^{r_b} \frac{S_i(r')}{r'} dr' + \frac{\epsilon S_i(r_b)}{1 + \epsilon} \int_0^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1 + \epsilon R'} dR'. \quad (2.32)$$

В пределе $\epsilon \ll 1$ уравнение (2.31) линейно по ϵ , поэтому приближенное выражение для Ψ снаружи плазменной полости (для $r > r_b$):

$$\Psi(\xi, r) \approx \epsilon(r_b) S_i(r_b) \int_{R(r, r_b)}^\infty M_0(R') dR', \quad (2.33)$$

а внутри плазменной полости ($r < r_b$)

$$\Psi(\xi, r) \approx \int_r^{r_b} \frac{S_i(r')}{r'} dr' + S_i(r_b)\epsilon(r_b). \quad (2.34)$$

Второй член в этом уравнении оставлен для обеспечения неразрывности функции Ψ на границе.

2.3.2 Продольное электрическое поле

Выражений (2.33) и (2.34) достаточно, чтобы найти распределение продольного электрического поля $E_z = \partial\Psi/\partial\xi$ (см. (1.7)). Для нахождения поля внутри плазменной полости мы дифференцируем только первый член в (2.34) и получаем:

$$E_z(\xi) \approx \frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b', \quad (2.35)$$

Продольное электрическое поле в плазменной полости не зависит от поперечной координаты r , что важно для ускорения электронов: электроны в произвольном поперечном сечении ускоряемого сгустка испытывают влияние одного и того же ускоряющего поля, что обеспечивает равномерное ускорение электронов независимо от поперечного размера сгустка.

Для нахождения поля снаружи плазменной полости необходимо продифференцировать уравнение (2.33) по ξ , что эквивалентно дифференцированию по r_b и домножению на r_b' . Нетрудно заметить, что производная от R

$$\frac{\partial R}{\partial r_b} = -\frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{r_b \epsilon} \quad (2.36)$$

имеет порядок малости -1 по параметру ϵ , в то время как дифференцирование S_i и ϵ не меняет порядок малости выражения, поэтому его можно не производить. Таким образом, снаружи плазменной полости ($r > r_b$) продольное электрическое поле будет равно

$$E_z \approx \frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b' M_0(R). \quad (2.37)$$

Оно спадает к нулю с удалением от плазменной полости в соответствии с видом функции $M_0(R)$, задаваемой профилем электронного слоя $g(X)$. Например, если

электронный слой имеет экспоненциальный профиль $g(X) = \exp(-X)$, то для него $M_0(X) = \exp(-X)$, соответственно электрическое поле спадает по экспоненциальному закону

$$\exp(-R) = \exp\left(-\frac{r - r_b}{\Delta}\right) \quad (2.38)$$

с характерным масштабом Δ .

Для сравнения аналитических выражений с численным моделированием необходимо задать функцию $g(X)$ и толщину Δ . На основе результатов моделирования, соответствующих Рис. 8, мы предполагаем, что $g(X) = \exp(-X)$. При этом наилучшее соответствие результатам моделирования дает значение $\Delta = 0.75$. Сравнение результатов моделирования с аналитическими выражениями (2.35, 2.37) показано на Рис. 9. На Рис. 10 также показано распределение поля в продольном и поперечном сечениях. Это сравнение демонстрирует, что модель хорошо описывает как продольное электрическое поле внутри плазменной полости, которое действительно однородно по поперечной координате, так и характер спада электрического поля к нулю снаружи полости. Как уже отмечалось ранее, отличие между теоретической моделью и результатами моделирования наблюдается в передней и задней части плазменной полости, где не выполнены условия применимости релятивист-

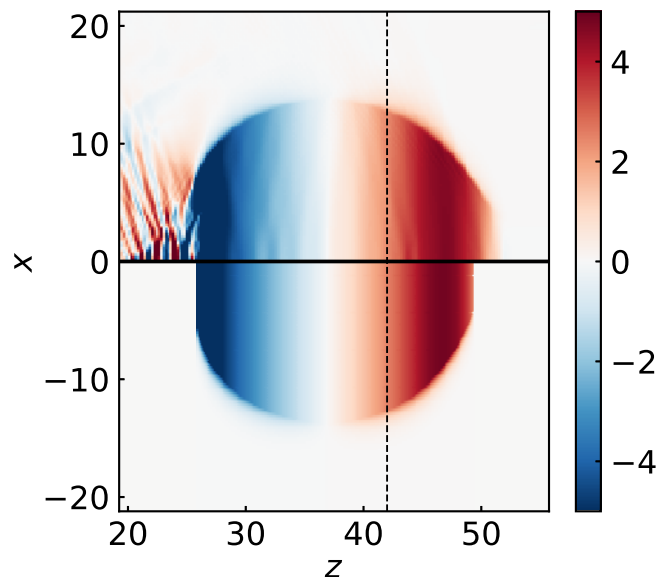


Рис. 9: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения продольного электрического поля E_z в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (2.35, 2.37). Штриховая линия соответствует сечению, показанному на Рис. 10(b).

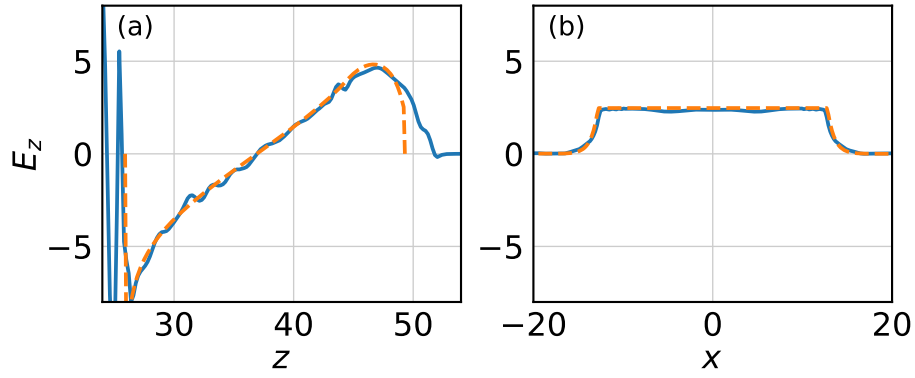


Рис. 10: Распределения продольного электрического поля E_z вдоль (a) $x = 0$, (b) $z = 42$, соответствующие распределению на Рис. 9. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам.

ского приближения.

2.3.3 Магнитное поле

Магнитное поле в рамках аксиально-симметричной геометрии имеет только азимутальную компоненту B_ϕ , вычисляемую по формуле (1.18), которую удобно переписать как

$$rB_\phi(\xi, r) = r_b B_\phi(\xi, r_b) + \int_{r_b(\xi)}^r \left(J_z + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \right) r' dr'. \quad (2.39)$$

Как уже показано ранее в (2.12),

$$r_b B_\phi(\xi, r_b) = \frac{r_b^2}{2} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \lambda(\xi). \quad (2.40)$$

Преобразуем это равенство, используя выражение (2.35) для продольного электрического поля и уравнение для границы полости (2.28):

$$r_b B_\phi(\xi, r_b) \approx -\lambda(\xi) + \frac{r_b^2}{2} \left[\frac{S_i'(r_b)}{r_b} r_b'^2 - \frac{S_i(r_b)}{r_b^2} r_b'^2 + \frac{S_i}{r_b} r_b'' \right] = -\frac{S_i(r_b)}{2} (1 + r_b'^2). \quad (2.41)$$

Аналогичным образом, используя однородность продольного электрического поля по поперечной координате, можно получить выражение для магнитного поля внутри плазменной полости (для $r < r_b$):

$$B_\phi(\xi, r) \approx -r \left[\frac{S_i(r_b)}{2r_b^2} (1 + r_b'^2) - \frac{\lambda(\xi)}{r_b^2} \right] - \frac{\tilde{\lambda}(\xi, r)}{r}, \quad (2.42)$$

где

$$\tilde{\lambda}(\xi, r) = - \int_0^r \rho_B(\xi, r') r' dr'. \quad (2.43)$$

Очевидно, что $\tilde{\lambda}(\xi, r = r_b) = \lambda(\xi)$ по определению (2.13). Таким образом, магнитное поле в поперечном сечении, в котором отсутствуют электронные сгустки ($\tilde{\lambda} = \lambda = 0$), линейно зависит от поперечной координаты r для произвольного профиля плазмы и произвольной формы плазменной полости. К тому же знак B_ϕ всегда отрицателен.

Для вычисления магнитного поля снаружи плазменной полости необходимо подставить модель (2.5) для распределения продольной компоненты плотности тока J_z и выражение (2.37) для продольного поля E_z в (2.39). В результате интегрирования получим:

$$\int_{r_b}^r J_z r' dr' \approx J_0(\xi) r_b \Delta_J [1 - M_{J,0}(\alpha R)], \quad (2.44)$$

$$\int_{r_b}^r \frac{\partial E_z}{\partial \xi} r' dr' \approx S_i(r_b) r_b'^2 [1 - M_0(R)], \quad (2.45)$$

где $\alpha = \Delta/\Delta_J$. Значение $J_0(\xi)$ может быть получено исходя из условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r B_\phi = 0, \quad J_0(\xi) = \frac{S_i(r_b)}{2r_b \Delta_J} (1 - r_b'^2). \quad (2.46)$$

В итоге магнитное поле снаружи плазменной полости ($r > r_b$) равно:

$$B_\phi \approx \frac{S_i(r_b)}{2r_b} [M_{J,0}(\alpha R) (r_b'^2 - 1) - 2M_0(R) r_b'^2]. \quad (2.47)$$

Это уравнение вместе с уравнением (2.42) дают полное пространственное распределение азимутального магнитного поля. Из (2.46) следует еще один интересный результат: продольная компонента плотности тока J_z зануляется на границе плазменной полости в точках, где $|r_b'(\xi)| = 1$, что наблюдалось в моделировании в работе [131].

Для сравнения полученных распределений магнитного поля с результатами численного моделирования мы предположили, что $g_J(X) = \exp(-X)$, и задали $\Delta_J = 0.81$ для наиболее точного соответствия результатам моделирования. Сравнение показано на Рис. 11 и 12. Оно снова демонстрирует справедливость приближенной мо-

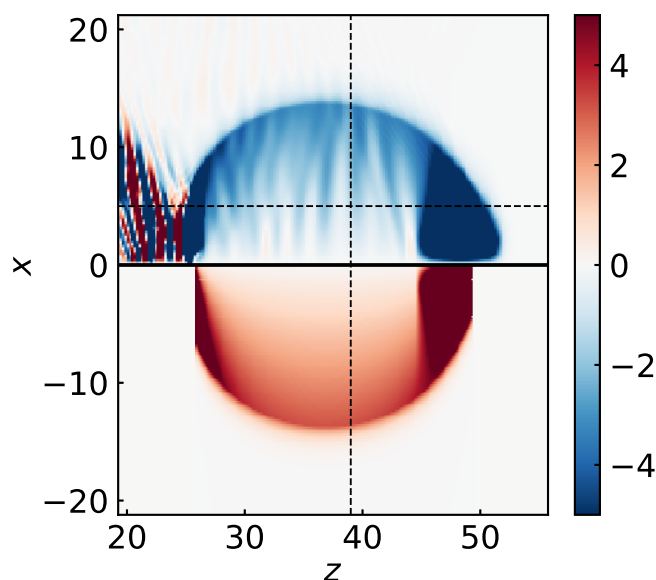


Рис. 11: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения азимутального магнитного поля B_y в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (2.42, 2.47). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на Рис. 12.

дели для описания полей снаружи и внутри плазменной полости. Продольные возмущения магнитного поля, наблюдаемые в результатах моделирования, не являются физически значимыми и обусловлены проявлением численных эффектов. Существует два численных источника этих возмущений: отражения от стенок моделируемого объема и численное черенковское излучение релятивистского драйвера [132]. Используемый в моделировании размер пространства (18π во всех трех направлениях) достаточен для подавления влияния отражений. Однако, численное черенковское излучение не может быть подавлено изменением параметров моделирования;

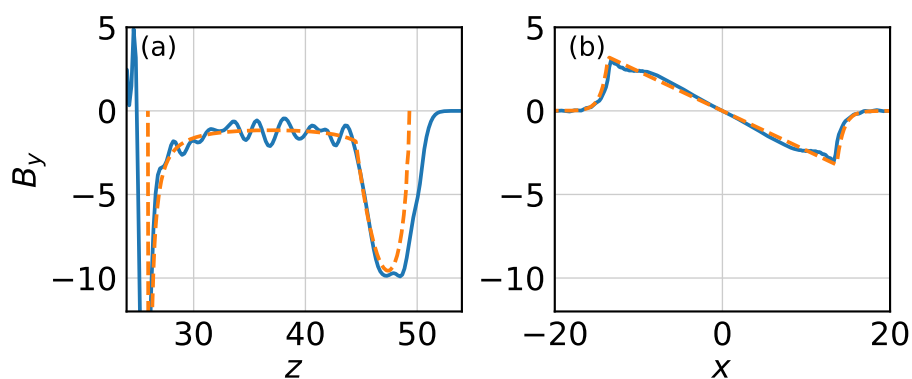


Рис. 12: Распределения азимутального магнитного поля B_y вдоль (a) $x = 5$, (b) $z = 39$, соответствующие распределению на Рис. 11. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам.

методы его подавления еще не реализованы в трехмерной версии кода Smilei.

2.3.4 Поперечное электрическое поле

Зная магнитное поле B_ϕ , достаточно легко вычислить поперечное электрическое поле E_r , используя (1.8). Для этого достаточно вычислить радиальную производную от кильватерного потенциала Ψ , задаваемого выражениями (2.33, 2.34):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{S_i(r)}{r}, & r < r_b(\xi), \\ -\frac{S_i(r_b)}{r_b} M_0(R), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (2.48)$$

Тогда поле E_r внутри плазменной полости ($r < r_b$):

$$E_r(\xi, r) = B_\phi(\xi, r) + \frac{S_i(r)}{r}, \quad (2.49)$$

где B_ϕ вычислено в (2.42), а снаружи ($r > r_b$):

$$E_r \approx \frac{S_i(r_b)}{2r_b} [M_{J,0}(\alpha R) - 2M_0(R)] (r_b'^2 - 1). \quad (2.50)$$

Внутри плазменной полости знаки $S_i(r)/r$ и B_ϕ являются противоположными, причем в окрестности центра плазменной полости типично, что $E_r > 0$. Для однородной плазмы вне областей с электронными сгустками

$$E_r = \frac{r}{4} (1 - r_b'^2), \quad (2.51)$$

т. е. поперечное электрическое поле, как и магнитное, линейно растет с увеличением координаты, что хорошо известно из более ранних моделей [88]. Однако, в неоднородной плазме зависимость E_r от r , в отличие от магнитного поля, становится нелинейной. В частности, в плазме с полым каналом $S_i = 0$ внутри канала, поэтому проекция E_r может иметь разный знак внутри и вне канала. Также можно отметить, что поперечное электрическое поле E_r , как и продольная компонента тока J_z , обращается в нуль в областях, где $|r_b'(\xi)| = 1$.

Данное поведение наблюдается в результатах моделирования, показанных на Рис. 13, 14. Наличие полого канала в плазме вызывает изменение знака E_r внутри

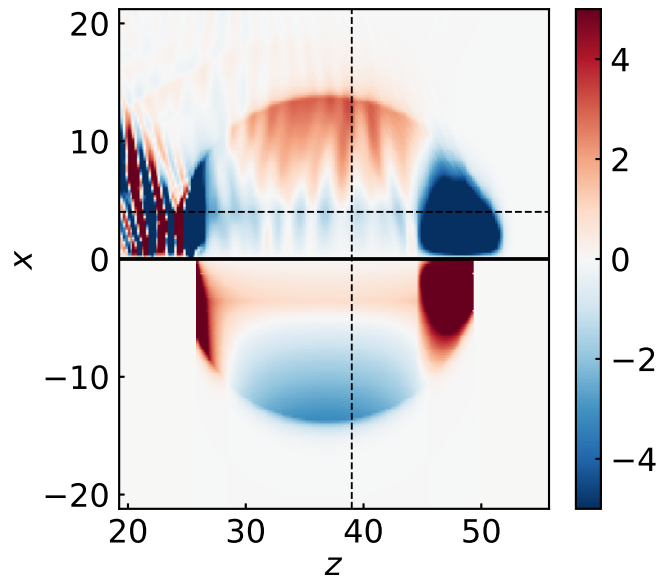


Рис. 13: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения радиального электрического поля E_x в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (2.49, 2.50). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на Рис. 14.

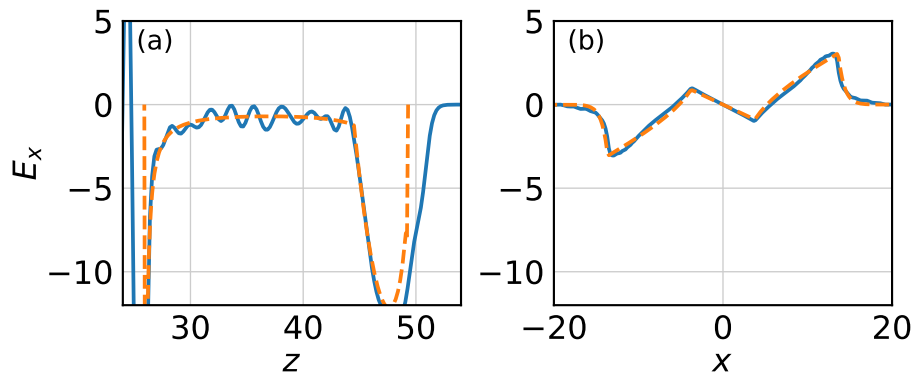


Рис. 14: Распределения радиального электрического поля E_x вдоль (a) $x = 4$, (b) $z = 39$, соответствующие распределению на Рис. 13. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам.

него. Продольные возмущения в результатах численного моделирования, как и в случае магнитного поля, вызваны численным черенковским излучением.

2.4 Вычисление формы плазменной полости

Рассмотрим аналитические методы вычисления формы плазменной полости. Для этого вернемся к рассмотрению уравнения (2.28) для плазменной полости в ре-

лятивистском приближении:

$$S_i(r_b)r_b \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + S'_i(r_b)r_b \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 + S_i(r_b) = 2\lambda(\xi), \quad (2.52)$$

где $S_i(r) = \int_0^r \rho_i(r')r' dr'$ определяется лишь поперечным профилем плазмы $\rho_i(r)$, а $\lambda(\xi) = -\int_0^{r_b} \rho_B(\xi, r')r' dr'$ зависит от электронных сгустков, помещенных внутрь плазменной полости. Несмотря на то что в этом уравнении не присутствуют слагаемые, отвечающие за воздействие лазерного импульса, это уравнение справедливо и для случая лазерного драйвера в области пространства, где он отсутствует, например, в задней части плазменной полости.

Наибольший интерес с точки зрения ускорения представляют силы, действующие на электроны в ускоряемых сгустках. Действие поперечной силы будет рассмотрено в главе 3. Продольная сила, отвечающая за ускорение, определяется в основном продольной компонентной электрического поля E_z в плазменной полости, которое зависит только от продольной координаты ξ и определяется как профилем плазмы, так и формой плазменной полости (см. (2.35)):

$$E_z(\xi) = \frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b'. \quad (2.53)$$

Таким образом, для нахождения продольной силы необходимо знать решение уравнения (2.52).

Как было показано в разделе 2.2.3, релятивистское приближение не может быть справедливым при $r_b \rightarrow 0$. В связи с этим приближенное уравнение (2.52) не может описать процесс возбуждения плазменной полости электронным сгустком или лазерным импульсом. Поэтому для задания начальных условий мы будем предполагать, что нам известен поперечный размер плазменной полости в точке, где функция $r_b(\xi)$ достигает максимума: $R_b = \max r_b$. Для простоты мы будем полагать, что этот максимум достигается в точке $\xi = 0$. Тогда начальные условия для уравнения (2.52) можно записать как:

$$r_b(0) = R_b, \quad r_b'(0) = 0. \quad (2.54)$$

При этом, в силу того что координата ξ направлена в противоположном направле-

нии оси z , $\xi = 0$ отвечает центру плазменной полости, $\xi > 0$ отвечает задней части полости, а $\xi < 0$ — передней. В большинстве случаев электрическое поле в передней части плазменной полости всюду является замедляющим для электронов, а в задней — ускоряющим.

В данном разделе мы будем искать решение для задней части плазменной полости ($\xi > 0$), предполагая, что лазерный импульс либо электронный сгусток, возбуждающий плазменную полость, полностью находится в ее передней части ($\xi < 0$). Таким образом, источник $\lambda(\xi)$, стоящий в правой части (2.52), будет содержать только ускоряемые электронные сгустки. В этом случае нам нет необходимости знать свойства драйвера, возбуждающего плазменную полость, и результаты будут применимы к плазменной полости размера R_b , возбуждаемой произвольным драйвером.

В задней части плазменной полости она замыкается к оси $r = 0$ за счет кулоновского притяжения со стороны ионов, действующего на электроны в слое на границе полости. Поэтому мы будем предполагать монотонное убывание функции $\kappa_b(\xi)$ при $\xi > 0$. Данная монотонность может быть нарушена, если источник $\lambda(\xi)$ (т. е. ускоряемый электронный сгусток) оказывает достаточно сильное воздействие, способное скомпенсировать ионное притяжение. В случае, когда функция $\kappa_b(\xi)$ монотонна, существует обратная к ней функция $\xi_b(r)$. Это позволяет нам произвести замену $\xi = \xi_b(r)$ в уравнении (2.52). Также введем новую функцию, заменяющую производную κ'_b :

$$Y(r) = \kappa'_b(\xi_b(r)). \quad (2.55)$$

Тогда вторая производная κ''_b заменится следующим образом:

$$\kappa''_b(\xi_b(r)) = \frac{d}{d\xi} Y(r) = Y'(r) \kappa'_b(\xi_b(r)) = Y'(r) Y(r). \quad (2.56)$$

Таким образом, уравнение (2.52) преобразуется в уравнение первого порядка:

$$S_i(r) r Y Y' + S'_i(r) r Y^2 + S_i(r) = 2\Lambda(r), \quad (2.57)$$

где $\Lambda(r) = \lambda(\xi_b(r))$. Путем умножения данного уравнения на S_i и деления на r мы

можем выделить полную производную в его левой части:

$$\frac{d}{dr} (S_i^2 Y^2) = \frac{2S_i}{r} (2\Lambda - S_i). \quad (2.58)$$

Путем прямого интегрирования этого уравнения и дальнейшего возврата к исходной переменной ξ получим

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{S_i(r_b)} \sqrt{2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_b}^{R_b} \frac{4S_i\Lambda}{r'} dr'}, \quad (2.59)$$

$$F_i(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{S_i^2(r')}{r'} dr'. \quad (2.60)$$

Отрицательный знак перед корнем в (2.59) выбран из условия того, что при монотонном спадании $r'_b(\xi)$ всегда отрицательна. Соответствующее продольное электрическое поле, задаваемое (2.53), вычисляется как

$$E_z(\xi) = -\frac{1}{r_b} \sqrt{2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_b}^{R_b} \frac{4S_i\Lambda}{r'} dr'}. \quad (2.61)$$

В случае использования однородной плазмы $S_i(r) = r^2/2$, и уравнение (2.59) приобретает более простой вид [97; 98]:

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{r_b^2} \sqrt{\frac{R_b^4 - r_b^4}{2} - 8 \int_{r_b}^{R_b} \Lambda r' dr'}. \quad (2.62)$$

Таким образом, нам удалось свести дифференциальное уравнение второго порядка (2.52) к уравнению первого порядка (2.59). Однако, в общем случае уравнение (2.59) не является обыкновенным дифференциальным уравнением, так как функция $\Lambda(r) = \lambda(\xi_b(r))$ зависит от решения $r_b(\xi)$ и поэтому в общем случае неизвестна. Тем не менее, в некоторых особых случаях можно найти явный вид этой функции. Об этих случаях пойдет речь далее.

2.5 Ненагруженная плазменная полость

Рассмотрим ненагруженную плазменную полость, т. е. полость, в которой отсутствуют ускоряемые сгустки. Для такого случая источник $\lambda(\xi) = 0$, что автоматически означает, что в (2.59) мы должны положить $\Lambda(r) = 0$. С учетом замены переменных $\xi = \xi_b(r)$, уравнение (2.59) примет вид:

$$\xi_b(r) = \int_r^{R_b} \frac{S_i(r') dr'}{\sqrt{2F_1(r', R_b)}}. \quad (2.63)$$

Данное уравнение задает решение в квадратурах для функции $\xi_b(r)$, являющейся обратной к искомой функции $r_b(\xi)$. При подстановке $r = 0$ оно позволяет оценить длину плазменной полости. Электрическое поле в такой ненагруженной полости запишется как

$$E_z(\xi) = -\frac{\sqrt{2F_1(r_b, R_b)}}{r_b(\xi)}. \quad (2.64)$$

Поскольку функция $r_b(\xi)$ является монотонно убывающей, а $F_1(r_b, R_b)$ и r_b^{-1} монотонно растут с уменьшением r_b , зависимость продольного электрического поля E_z от продольной координаты ξ в ненагруженной плазменной полости всегда является монотонно возрастающей функцией. Таким образом, только лишь путем подбора профиля плазмы невозможно создать произвольную зависимость $E_z(\xi)$, допускающую зануление производной E'_z .

Для частного случая плазмы со степенным профилем концентрации $\rho_i(r) = (r/R_b)^n$ выражение (2.63) можно проинтегрировать аналитически:

$$\xi(r_b) = R_b \sqrt{n+2} \frac{t^{n+3}}{n+3} \cdot {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n+3}{2(n+2)}; \frac{3n+7}{2(n+2)}; t^{2n+4} \right) \Bigg|_{t=\frac{r_b}{R_b}}^{t=1}, \quad (2.65)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция. Профиль плазмы нормирован таким образом, что плотность достигает единицы на границе плазменной полости, поэтому увеличение n соответствует углублению канала в плазме. Длину задней части

плазменной полости при этом можно выразить более простым выражением:

$$\xi_{\max} = \xi(0) = R_b \sqrt{\pi} \sqrt{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2n+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n+4}\right)}. \quad (2.66)$$

Задаваемая этим выражением длина уменьшается с ростом n , т. е. с углублением канала в плазме. Границы плазменных полостей и электрические поля в плазме со степенным профилем показаны на Рис. 15. Длина плазменной полости и величина электрического поля уменьшаются с увеличением глубины канала. При этом наблюдается особенность в зависимости $E_z(\xi)$ в задней части плазменной полости. Эта особенность вызвана неприменимостью используемого нами релятивистского приближения при малых r_b и пропадает в случае решения более точного уравнения (2.16).

Схожие свойства проявляют и плазменные полости в плазме с полым каналом. Границы плазменных полостей и соответствующие электрические поля, рассчитанные по формулам (2.63) и (2.64) для плазмы с полым каналом $\rho_i = \theta(r - r_c)$, где $\theta(X)$ — степ-функция Хевисайда, показаны на Рис. 16. При увеличении размера канала в плазме длина плазменной полости сокращается, а ускоряющее электрическое поле становится меньше.

Из более общих формул (2.63) и (2.64) можно получить поведение границы плазменной полости и продольного электрического поля в окрестности центра плаз-

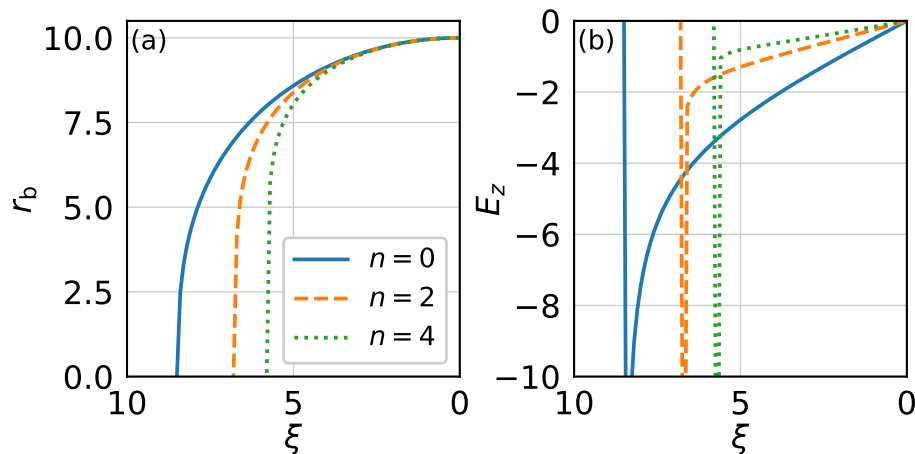


Рис. 15: Зависимости (а) границ ненагруженных плазменных полостей r_b и (б) продольного электрического поля E_z в них от продольной координаты ξ в плазме со степенным профилем с различными показателями степени n , рассчитанные по формулам (2.65) и (2.64). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$.

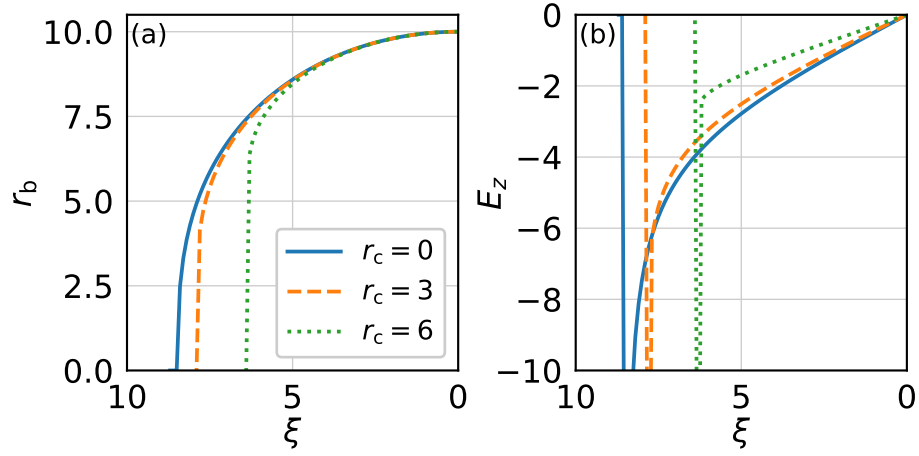


Рис. 16: Зависимости (а) границ ненагруженных плазменных полостей r_b и (б) продольного электрического поля E_z в них от продольной координаты ξ в плазме с каналами различного радиуса r_c , рассчитанные по формулам (2.63) и (2.64). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$.

менной полости, т. е. точки $\xi = 0$. Для этого в (2.63) положим

$$S_i(r') \approx S_i(R_b), \quad F_i(r', R_b) \approx \frac{S_i^2(R_b)}{R_b} (R_b - r') \quad (2.67)$$

и получим

$$\xi_b(r) \approx \sqrt{2R_b(R_b - r)}. \quad (2.68)$$

Переходя от обратной функции $\xi_b(r)$ к $r_b(\xi)$, получим

$$r_b(\xi) \approx R_b \left(1 - \frac{\xi^2}{2R_b^2} \right). \quad (2.69)$$

Первое, на что стоит обратить внимание, это отсутствие зависимости формы плазменной полости в окрестности ее центра от профиля плазмы, что наблюдается на Рис. 15(а) и 16(а). Также можно заметить, что это выражение соответствует окружности с радиусом R_b . Близость формы плазменной полости к окружности наблюдается и в численном моделировании, что использовалось при построении наиболее ранних моделей плазменной полости, предполагавших, что она является идеальной сферой [88]. Тем не менее, более точное выражение (2.63) не описывает окружность. Как можно видеть из Рис. 15, 16, продольный размер плазменной полости оказывается меньше ее поперечного размера.

Поскольку приближенная зависимость $r_b(\xi)$ в окрестности $\xi = 0$ является квад-

ратичной, соответствующее электрическое поле E_z оказывается линейным:

$$E_z \approx -\frac{S_i(R_b)}{R_b^2} \xi. \quad (2.70)$$

Если концентрация всегда нормируется таким образом, что $\rho_i(r) \leq 1$ внутри плазменной полости, то $S_i(R_b) \leq R_b^2/2$. Таким образом, градиент электрического поля ограничен: $|E_z| \leq \xi/2$. Максимальный коэффициент 1/2 соответствует случаю однородной плазмы. Отсюда следует, что использование канала в плазме приводит к уменьшению электрического поля. Данный вывод подтверждается и при использовании более точного выражения (2.64), что демонстрирует Рис. 16(b). Более того, линейность зависимости электрического поля от координаты, предсказываемая упрощенной формулой (2.70), наблюдается не только в окрестности центра плазменной полости, но практически на всей ее длине.

Для проверки предсказаний модели была проведена серия численных моделирований плазменной полости, возбуждаемой в плазме с полым каналом различного радиуса r_c , при помощи трехмерного кода QUILL [133; 134], основанного на методе частиц в ячейках. Результаты моделирования для плазмы с различными радиусами каналов r_c показаны на Рис. 17. В моделировании использовалась плазма с концентрацией $n_p = 4.5 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$, что соответствовало плазменной длине волны 5 мкм. Во всех случаях использовался электронный драйвер с полным зарядом 3.2 нКл, энергией частиц 1 ГэВ и характерными продольным и поперечным размерами 6 мкм и 4 мкм соответственно. Из Рис. 17 видно, что длина плазменной полости действительно уменьшается с увеличением радиуса канала, а градиент продольного электрического поля уменьшается. Результаты также в очередной раз демонстрируют хорошее согласие между предсказаниями нашей теории и численным моделированием.

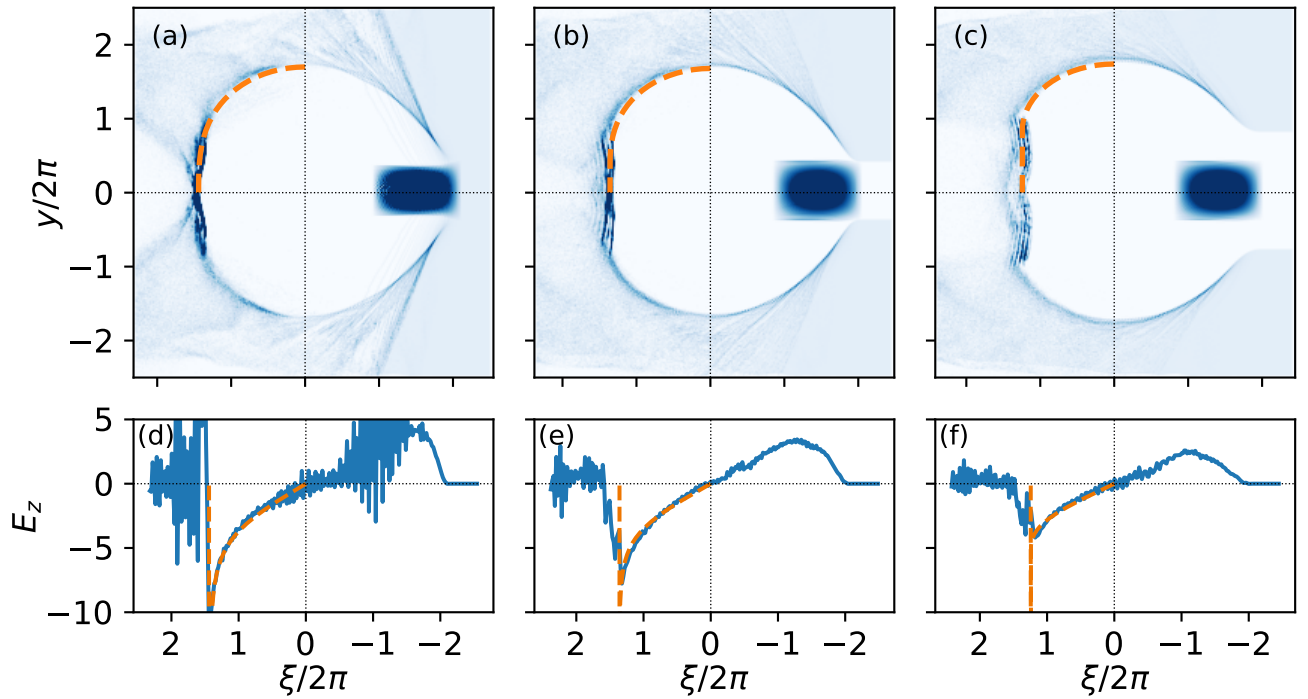


Рис. 17: (а–с) Распределения плотности заряда электронов в пространстве и (d–f) соответствующие продольные электрические поля на оси плазменной полости, наблюдаемые в численном моделировании методом частиц в ячейках для плазмы с каналом $\rho_i(r) = \theta(r - r_c)$ и радиусов канала $r_c = 0, 0.8\pi$ и 1.6π соответственно. Аналитические решения для границы плазменной полости и продольного электрического поля, задаваемые выражениями (2.63) и (2.64), показаны штриховыми линиями. Все пространственные масштабы нормированы на $\lambda_p = 5$ мкм.

2.6 Выводы

В данной главе представлена модель, описывающая плазменную полость в плазме с поперечной неоднородностью. Для описания плазменной полости использована феноменологическая модель, в которой предполагается, что внутри плазменной полости отсутствуют электроны плазмы, а на ее границе находится тонкий электронный слой, причем распределение электронов в этом слое может быть произвольным. В предположении малости толщины электронного слоя получено дифференциальное уравнение для описания границы плазменной полости, а также найдены явные выражения для компонент электромагнитного поля. Численное моделирование методом частиц в ячейках показало применимость полученных результатов. Также в этой главе приведено аналитическое решение для формы ненагруженной плазменной полости в плазме с произвольным поперечным профилем плотно-

сти. Показано, что использование полого канала в плазме приводит к укорочению плазменной полости и уменьшению амплитуды ускоряющего поля в ней.

Несмотря на то что полученные аналитически результаты в хорошей степени совпадают с результатами численного моделирования методом частиц в ячейках, основным недостатком разработанной теории является ее несамосогласованность, в результате чего она не позволяет описать процесс возбуждения кильватерной волны в сильно нелинейном режиме. В действительности на переднем фронте драйвера (лазерного импульса или электронного сгустка) отклик плазмы является квазилинейным и не имеет явно выраженного электронного слоя, отграничивающего плазменную полость от окружающей плазмы. Поэтому описание в рамках модели, в которой есть граница плазменной полости, возможна только для областей пространства, в которых эта граница присутствует, и поэтому в качестве начальных условий в уравнении (2.16) мы выбирали поперечный размер плазменной полости в ее середине. Кроме того, модель не допускает попадания электронов плазмы внутрь плазменной полости, хотя это приближение может быть неверно для приосевых электронов. Также в ней сделаны допущения относительно электронного слоя на границе плазменной полости. Несмотря на то что форма электронного слоя может быть произвольной, его толщина в модели фиксирована и не зависит от продольной координаты, что может быть неверно для плазменных полостей малого размера. При этом толщина является внешним параметром модели и не может быть получена самосогласованным образом. Еще одним эффектом, не учитываемым в рамках модели, является существование боковых волн, т. е. потоков электронов, отрывающихся от границы плазменной полости и далеко от нее уходящих [135; 136]. В частности, они хорошо видны на Рис. 8, 17а. Так как результаты численного моделирования, в которых эти волны видны, не сильно отличаются от предсказаний разработанной теории, можно предположить, что влияние этих волн несущественно. Тем не менее, возможность существования параметров, при которых их наличие оказывается важным эффектом, нельзя исключать.

Основные полученные в данной главе результаты опубликованы в работах [A1—A3; A5; A7; A8; A11—A14].

3 Динамика электронов в сильно нелинейном режиме кильватерной волны в плазме с поперечной неоднородностью

Глава 2 была посвящена описанию сильно нелинейной кильватерной волны, генерируемой драйвером в плазме. Поскольку основным применением кильватерной волны является ускорение сгустков заряженных частиц или использование ускоренных электронов для генерации излучения, необходимо также уметь описывать движение заряженных частиц, оказавшихся внутри плазменной полости. В принципе, найденные в разделе 2.3 распределения компонент электромагнитного поля достаточны для расчета движения тестового электрона. Однако, как это хорошо известно, для описания движения релятивистских электронов можно использовать упрощенный подход, в котором используется только кильватерный потенциал Ψ . Еще одним важным эффектом является то, что в соответствии с уравнением (2.16) ускоряемые электроны оказывают влияние на форму плазменной полости и, следовательно, на ускоряемое поле, что называется эффектом нагрузки плазменной полости. Поэтому динамику сгустков с большим зарядом необходимо рассчитывать самосогласованным образом с учетом этого влияния. В этой главе будут рассмотрены некоторые особенности движения релятивистских частиц в плазменной полости, а также эффекты, связанные с нагрузкой плазменной полости ускоряемым сгустком.

3.1 Движение релятивистских сгустков частиц в кильватерной волне

Рассмотрим силу Лоренца, действующую со стороны полей кильватерной волны на релятивистскую частицу с зарядом Q и Лоренц-фактором $\gamma \gg 1$, движущуюся преимущественно в направлении распространения кильватерной волны:

$$p_z \gg |p_r|, \quad p_\phi = 0. \quad (3.1)$$

У силы Лоренца есть только продольная и поперечная компоненты, которые можно выразить через потенциал Ψ , пользуясь уравнениями (1.7–1.9). Продольная компонента силы равна

$$F_z = Q(E_z + v_r B_\phi) = Q \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + Q \frac{p_r}{\gamma} B_\phi \approx Q \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}. \quad (3.2)$$

Поскольку $|p_r| \ll \gamma$, а поле B_ϕ по порядку величины сопоставимо либо меньше поля E_z , то вторым слагаемым в силе можно пренебречь. Схожим образом можно упростить поперечную силу:

$$F_r = QE_r - Qv_z B_\phi = Q(E_r - B_\phi) + Q(1 - v_z)B_\phi \approx -Q \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.3)$$

Здесь малым множителем является

$$1 - v_z = \frac{\gamma - p_z}{\gamma} = \frac{1 + p_r^2}{\gamma(\gamma + p_z)} \ll 1. \quad (3.4)$$

Стоит отметить, что поправка к поперечной силе второго порядка малости по $|p_r/\gamma|$, в то время как поправка в продольной силе — первого. Мы получили известный результат: компоненты силы Лоренца, действующей на релятивистские частицы, выражаются через производные от кильватерного потенциала. Пространственное распределение поля B_ϕ оказывает очень незначительное влияние на их движение, поэтому его можно не находить. Отметим, что полученные выражения справедливы для произвольной кильватерной волны, а не только кильватерной волны в сильно нелинейном режиме.

Применим теперь полученные выражения к случаю движения электронов в сильно нелинейной кильватерной волне, пользуясь выражениями для полей, найденными в разделе 2.3. Продольная сила с точностью до знака совпадает с продольным электрическим полем (2.35, 2.37):

$$F_z = -E_z = \begin{cases} -\frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b', & r < r_b(\xi), \\ -\frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b' M_0(R), & r \geq r_b(\xi), \end{cases} \quad (3.5)$$

где $R = (r - r_b)/\Delta$. Таким образом, как уже отмечалось ранее, величина продольной силы в плазменной полости не зависит от поперечной координаты, поэтому электроны в ускоряемом электронном сгустке ускоряются одинаково независимо от его поперечных размеров. Величина продольной силы определяется как профилем плазмы за счет функции $S_i(r)$ (см. (2.1)), так и формой плазменной полости $r_b(\xi)$.

Поперечная сила (3.3) определяется радиальной производной от кильватерного потенциала (2.48):

$$F_r(\xi, r) = \begin{cases} -\frac{S_i(r)}{r}, & r < r_b(\xi), \\ -\frac{S_i(r_b)}{r_b} M_0(R), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (3.6)$$

Внутри плазменной полости данная сила не зависит от продольной координаты и в силу знакоположительности функции $S_i(r)$ является фокусирующей для электронов и дефокусирующей для позитронов. В однородной плазме сила $F_r = -r/2$ является линейной, а в плазме с полым каналом она обращается в 0 внутри канала, что позволяет потенциально использовать подобную плазму для ускорения позитронов.

Результаты моделирования наглядно демонстрируют данный эффект от использования плазменного канала (Рис. 18, 19). На рисунках наблюдаются зануление

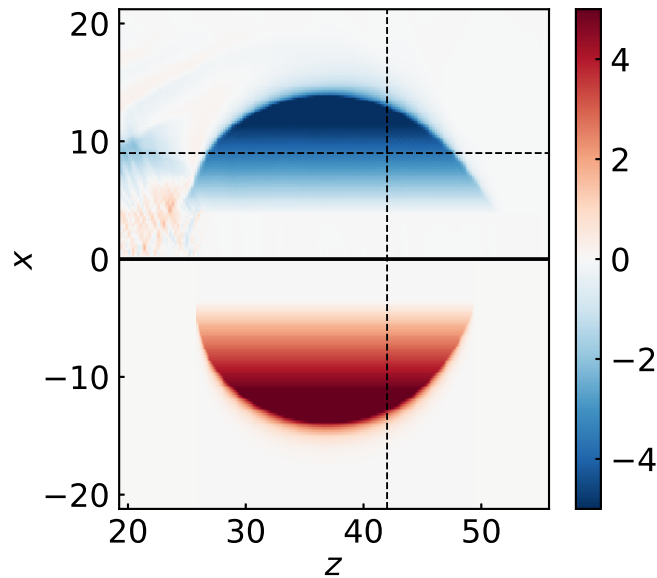


Рис. 18: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения поперечной силы $F_x = B_y - E_x$ в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формуле (3.6). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на Рис. 19.

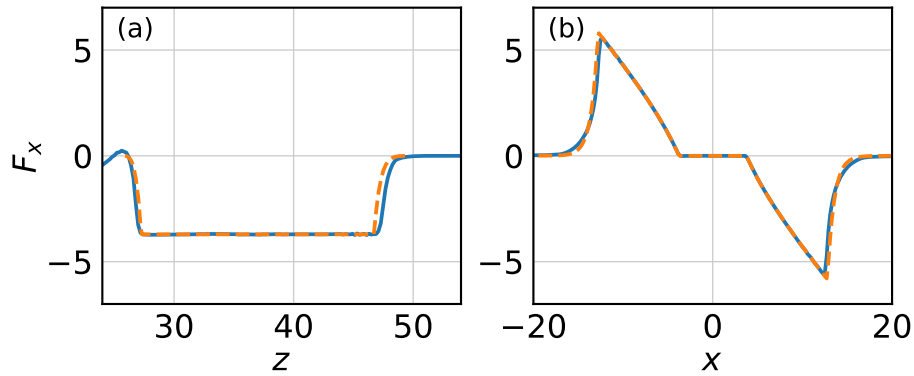


Рис. 19: Распределения поперечной силы F_x вдоль (a) $x = 9$, (b) $z = 42$, соответствующие распределению на Рис. 18. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам.

поперечной силы в области внутри канала $r < r_c$ и фокусирующий (для электронов) ее характер снаружи канала. Численное распределение $F_r = B_\phi - E_r$, в отличие от распределений E_r и B_ϕ , в данном случае демонстрирует практически полное совпадение с предсказаниями модели, что служит дополнительным подтверждением того, что видимые на Рис. 11 и 13 продольные возмущения являются поперечными электромагнитными волнами, излученными драйвером посредством механизма численного черенковского излучения.

3.2 Нагруженная плазменная полость

В разделе 3.1 было показано, что продольная сила, действующая на ускоряемые электронные сгустки, определяется формой плазменной полости. С другой стороны, в главе 2 было показано, что ускоряемый сгусток сам оказывает влияние на форму полости и тем самым приводит к изменению продольной силы. В этом разделе будет рассмотрена нагруженная плазменная полость, то есть полость, в которой ускоряются электроны, и ускорение сгустков в такой полости с учетом их влияния на ее форму.

3.2.1 Эффективность ускорения

Одним из ключевых моментов эффективного ускорения является использование как можно большей доли доступной в плазменной полости энергии. Поэтому данная секция будет посвящена расчету эффективности передачи энергии из плаз-

менной полости ускоряемому сгустку.

Предположим, что сгусток с произвольным продольным профилем $\lambda(\xi)$ помещен в заднюю часть плазменной полости, имеющей максимальный размер R_b . Пусть передний и задний фронт сгустка имеют координаты ξ_{inj} и $\xi_{tr} > \xi_{inj}$ соответственно. Данному сгустку соответствует некоторое решение $r_b(\xi)$ уравнения (2.52). Мы будем полагать, что оно является монотонным: $r'_b(\xi) < 0$, что в силу (2.53) означает, что продольное электрическое поле E_z всюду является ускоряющим. Мы также предполагаем, что сгусток целиком находится внутри плазменной полости, т. е. длина плазменной полости удовлетворяет условию $\xi_{max} \geq \xi_{tr}$, где длина определяется из равенства $r_b(\xi_{max}) = 0$. В этом случае, точкам ξ_{inj} и ξ_{tr} соответствуют поперечные размеры плазменной полости $r_{inj,tr} = r_b(\xi_{inj,tr})$. Соответственно, для $\xi > \xi_{tr}$ уравнение (2.59) запишется как

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{S_i} \sqrt{2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{4S_i \Lambda}{r'} dr'}. \quad (3.7)$$

Можно заметить, что это уравнение может быть записано в виде, совпадающем с уравнением (2.63) для ненагруженной плазменной полости:

$$r'_b = -\frac{1}{S_i(r_b)} \sqrt{2F_i(r_b, \tilde{R}_b)}, \quad (3.8)$$

где \tilde{R}_b определяется из уравнения

$$F_i(0, \tilde{R}_b) = F_i(0, R_b) - \int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')\Lambda(r')}{r'} dr'. \quad (3.9)$$

Таким образом, задняя часть плазменной полости в области $\xi > \xi_{tr}$ за пределами электронного сгустка описывается уравнением, соответствующем уравнению для ненагруженной плазменной полости меньшего размера \tilde{R}_b . То есть воздействие данного электронного сгустка приводит к «гашению» изначальной полости большего поперечного размера R_b и возбуждению остаточной полости меньшего размера \tilde{R}_b , длина комбинированной плазменной полости при этом увеличивается (см. Рис. 20). Требование знакоположительности выражения (3.9) накладывает ограничение на

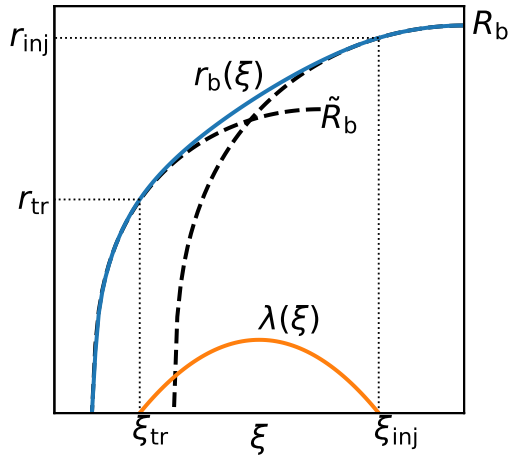


Рис. 20: Граница нагруженной плазменной полости $r_b(\xi)$ с электронным сгустком $\lambda(\xi)$ с параболическим профилем. Максимальный размер плазменной полости R_b . Штриховыми линиями показаны решения для ненагруженных плазменных полостей с размерами R_b и \tilde{R}_b .

ускоряемый электронный сгусток:

$$\int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')\Lambda(r')}{r'} dr' \leq F_1(0, R_b). \quad (3.10)$$

Наличие такого ограничения позволяет ввести величину

$$\eta = \frac{1}{F_1(0, R_b)} \int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')\Lambda(r')}{r'} dr', \quad (3.11)$$

которая может принимать значения на отрезке $[0; 1]$. Поэтому данную величину логично назвать эффективностью ускорения заданного электронного сгустка. Чтобы понять ее физический смысл, перейдем от интегрирования по r к интегрированию по ξ , а также используем определение функции λ (2.13):

$$\int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i\Lambda}{r'} dr' = 2 \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{tr}} \int_0^{r_B} E_z(\xi') \rho_B(\xi', r') r' dr' d\xi'. \quad (3.12)$$

Поскольку для релятивистских электронных сгустков $\rho_B \approx J_{B,z}$, то данный интеграл по объему электронного сгустка с точностью до константы есть не что иное, как мощность P , вырабатываемая электрическим полем плазменной полости при ускорении

данного электронного сгустка:

$$\int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i \Lambda}{r'} dr' = \frac{1}{\pi} P. \quad (3.13)$$

Таким образом, эффективность η может быть записана как отношение мощности P , вырабатываемой электрическим полем полости при ускорении данного сгустка, к максимальной достижимой мощности P_{max} :

$$\eta = -\frac{2}{F_1(0, R_b)} \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{tr}} E_z(\xi') \lambda(\xi') d\xi' = \frac{P}{P_{max}}, \quad P_{max} = \pi F_1(0, R_b). \quad (3.14)$$

Данное выражение позволяет рассчитать эффективность ускорения произвольного электронного сгустка. Стоит отметить, что максимально достижимая мощность для заданного поперечного профиля плазмы определяются лишь размером плазменной полости R_b . В частности, для однородной плазмы $P_{max} = \pi R_b^4 / 16$, что демонстрирует быстрый рост мощности при увеличении размера плазменной полости. В силу закона сохранения энергии очевидно, что максимальная мощность не может быть больше, чем скорость передачи энергии от драйвера к кильватерной волне.

3.2.2 Прямоугольный электронный сгусток

Некоторые общие свойства нагруженной плазменной полости можно рассмотреть, используя простой прямоугольный электронный сгусток с профилем $\lambda(\xi) = \lambda_0 \theta(\xi - \xi_{inj})$, где $\theta(X)$ — степ-функция Хевисайда, ξ_{inj} — координата переднего фронта сгустка, также называемая точкой инъекции сгустка. Длину сгустка мы будем считать неограниченной; естественным ограничением для длины будет являться длина плазменной полости. Для такого сгустка в области $\xi < \xi_{inj}$ $\lambda = 0$, а значит решение на отрезке $0 < \xi < \xi_{inj}$ совпадает с решением (2.63) для ненагруженной плазменной полости, из которого можно найти размер плазменной полости в точке инъекции: $r_{inj} = r_b(\xi_{inj})$. При $\xi > \xi_{inj}$ мы можем воспользоваться уравнением (2.59), в котором нужно положить $\Lambda(r) = \lambda_0 \theta(r_{inj} - r)$:

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{S_i} \sqrt{2F_1(r_b, R_b) - \lambda_0 \int_{r_b}^{r_{inj}} \frac{4S_i(r')}{r'} dr'}. \quad (3.15)$$

Заметим, что это уравнение, в отличие от общего уравнения (2.59), является обыкновенным дифференциальным. Для любого наперед заданного r_b подкоренное выражение достигает нуля для порогового значения постоянной λ_0 :

$$\hat{\lambda}_{\text{th}}(r_b) = F_1(r_b, R_b) \left(\int_{r_b}^{r_{\text{inj}}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' \right)^{-1}. \quad (3.16)$$

Используя свойства функции S_i , можно показать, что $\hat{\lambda}$ является монотонно возрастающей функцией r_b . Таким образом, существует глобальное пороговое значение

$$\lambda_{\text{th}} = \hat{\lambda}_{\text{th}}(0) = F_1(0, R_b) \left(\int_0^{r_{\text{inj}}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' \right)^{-1}. \quad (3.17)$$

Если $\lambda_0 < \lambda_{\text{th}}$, производная r'_b всегда остается строго отрицательной, значит граница плазменной полости $r_b(\xi)$ в итоге достигнет нуля. Если же значение плотности заряда λ_0 в сгустке превышает пороговое значение, найдется такая точка ξ_0 и соответствующий ей локальный радиус полости $r_0 = r_b(\xi_0)$, для которых $r'_b(\xi_0) = 0$. Это означает, что при превышении порога плотность заряда в сгустке становится достаточной для компенсации смыкания плазменной полости к ее оси. После прохождения точки, где $r'_b = 0$, производная меняет знак на положительный, что уже не описывается уравнением (3.15), и плазменная полость начинает снова расширяться. При этом также меняется знак электрического поля. Таким образом, хвостовая часть сгустка с плотностью заряда выше пороговой вместо ускорения начинает замедляться и, фактически, становится драйвером для плазменной полости. Если нашей целью является ускорение всего сгустка, то мы должны ограничить его длину точкой, в которой достигается $r'_b = 0$. В итоге, длина ускоряемого сгустка ограничена либо длиной плазменной полости (в случае $\lambda_0 < \lambda_{\text{th}}$), либо точкой разворота границы плазменной полости (в случае $\lambda_0 > \lambda_{\text{th}}$).

Используя полученную предельную длину прямоугольного сгустка, мы можем рассчитать эффективность его ускорения, используя выражение (3.11). Если $\lambda_0 < \lambda_{\text{th}}$, электронный сгусток ограничен длиной плазменной полости, а значит в

уравнении (3.11) $r_{\text{tr}} = 0$. Тогда

$$\eta = \frac{\lambda_0}{F_i(0, R_b)} \int_0^{r_{\text{inj}}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' = \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{th}}}. \quad (3.18)$$

Здесь использовано определение (3.17) для пороговой плотности заряда λ_{th} . Если же $\lambda_0 > \lambda_{\text{th}}$, то существует точка ξ_0 , при которой $r'_b(\xi_0) = 0$. Этой точке соответствует некий локальный радиус r_0 , который может быть найден из условия зануления производной (3.15):

$$F_i(r_0, R_b) - 2\lambda_0 \int_{r_0}^{r_{\text{inj}}} \frac{S_i(r')}{r'} dr' = 0 \quad (3.19)$$

Длина ускоряемого сгустка будет ограничена точкой ξ_0 . Тогда в уравнении (3.11) для эффективности мы должны положить $r_{\text{tr}} = r_0$:

$$\eta = \frac{2\lambda_0}{F_i(0, R_b)} \int_{r_0}^{r_{\text{inj}}} \frac{S_i(r')}{r'} dr' = \frac{F_i(r_0, R_b)}{F_i(0, R_b)}. \quad (3.20)$$

Таким образом, если $\lambda_0 < \lambda_{\text{th}}$, эффективность ускорения (3.18) линейно нарастает от 0 до 1 при увеличении λ_0 . Когда плотность сгустка λ_0 равна пороговой плотности λ_{th} , эффективность ускорения достигает 1. При превышении над порогом радиус r_0 , при котором наблюдается разворот границы, начинает расти с ростом λ_0 , приводя к уменьшению эффективности (3.20). То есть наиболее оптимальным с точки зрения эффективности ускорения является использование сгустка с плотностью, равной пороговой плотности (3.17). Стоит заметить, что пороговая плотность зависит от точки инъекции сгустка ξ_{inj} . Если мы при этом возьмем сгусток короче оптимальной длины, то эффективность также будет меньше теоретически возможной.

Для примера рассмотрим случай плазмы со степенным каналом $\rho_i(r) = (r/R_b)^n$. Профиль плазмы нормирован таким образом, что плотность достигает единицы на границе плазменной полости. Таким образом, увеличение n приводит к углублению канала в плазме. Характерные границы плазменных полостей с прямоугольным электронным сгустком для различных погонных плотностей заряда λ_0 в сгустках и соответствующие продольные электрические поля показаны на Рис. 21. Этот рисунок демонстрирует, что наличие ускоряемого сгустка приводит к удлинению плазменной полости по сравнению со случаем отсутствия сгустка (линия 1 на Рис. 21).

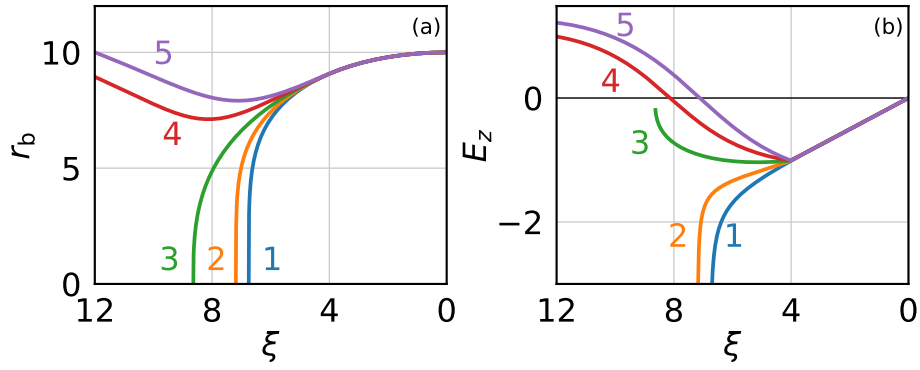


Рис. 21: Зависимости (а) границ плазменных полостей r_b и (б) продольных электрических полей E_z от продольной координаты ξ для разных плотностей заряда электронного сгустка λ_0 . Зависимости рассчитаны численно с использованием уравнений (2.52) и (2.53) соответственно. Линии 1–5 показывают решения для плотностей λ_0 от 0 до $2\lambda_{th}$ с шагом $0.5\lambda_{th}$. При вычислении использован параболический профиль плазмы ($n = 2$), максимальный радиус плазменных полостей $R_b = 10$, точка инжекции электронного сгустка $\xi_{inj} = 4$.

Рисунок также подтверждает наш вывод о наличии предсказанной нам пороговой плотности заряда λ_{th} (линия 3). При превышении над порогом (линии 4 и 5) локальный радиус плазменной полости, вместо смыкания к нулю, начинает увеличиваться, при этом меняется знак продольного поля E_z , которое становится положительным и, следовательно, замедляющим для электронов.

Пороговое значение, определяемое формулой (3.17), для плазмы со степенным каналом равно:

$$\lambda_{th} = \frac{R_b^{n+4}}{4(n+2)r_{inj}^{n+2}}. \quad (3.21)$$

Это значение растет при увеличении координаты инжекции ξ_{inj} (большие значения ξ_{inj} соответствуют меньшим значениям r_{inj}). Наименьший возможный пороговый заряд достигает при $\xi_{inj} = 0$ и равен

$$\lambda_{th,min} = \frac{R_b^2}{4(n+2)}. \quad (3.22)$$

Данное минимальное значение уменьшается с увеличением показателя степени n , что соответствует углублению канала.

Эффективность ускорения плоского сгустка для данного типа канала может

быть вычислена аналитически из уравнений (3.18) и (3.20):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{th}}}, & \lambda_0 < \lambda_{\text{th}}, \\ \eta &= 1 - X^2, & \lambda_0 > \lambda_{\text{th}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$X = \frac{\lambda_0}{2\lambda_{\text{min}}} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{\text{min}}}\right)^2 - \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{th}}} + 1}. \quad (3.24)$$

Зависимости, задаваемые уравнением (3.23), показаны на Рис. 22 для различных профилей плазмы и различных точек инжекции. Видно, что пороговое значение λ_{th} меньше для плазмы с более глубокими каналами, соответствующими большим значениям n . Также можно заметить, что эффективность быстрее падает с увеличением λ_0 для более близких к центру полости точек инжекции ξ_{inj} . Это можно объяснить тем, что для меньших ξ_{inj} поперечная скорость электронов в границе плазменной полости меньше, поэтому электроны более чувствительны к изменению плотности заряда в ускоряемом электронном сгустке.

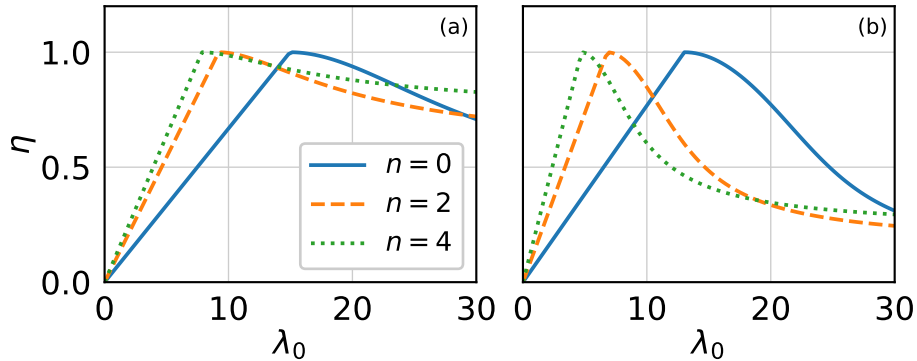


Рис. 22: Зависимости эффективности η от плотности заряда λ_0 , вычисленные по формуле (3.23) для различных показателей степени n ($n = 0, 2, 4$ для сплошной, штриховой и пунктирной линий соответственно) для точки инжекции (а) $\xi_{\text{inj}} = 2$ и (б) $\xi_{\text{inj}} = 4$. Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$.

3.2.3 Ускорение в однородном поле

Для получения ускоренных сгустков с малым разбросом по энергии, что необходимо для многих приложений, важно ускорять разные части сгустка в поле одинаковой амплитуды. Продольное электрическое поле в плазменной полости всегда является однородным по поперечной координате, поэтому на конечный разброс

частиц по энергии влияет только неоднородность поля по продольной координате. Идеальным для ускорения является полностью однородное ускоряющее поле во всем объеме сгустка. Как было показано в разделе 2.5, в ненагруженной плазменной полости зависимость продольного поля от координаты всегда является монотонной, поэтому в ней добиться однородности E_z невозможно. Однако, как уже было продемонстрировано ранее, ускоряемый электронный сгусток сам влияет на форму плазменной полости, а следовательно и на распределение поля в ней. Поэтому мы можем попытаться подобрать такой профиль электронного сгустка $\lambda(\xi)$, что электрическое поле внутри сгустка будет однородным. Для однородной плазмы данная задача была ранее решена в работах [97; 98].

Предположим, что передний фронт электронного сгустка находится в точке инъекции ξ_{inj} . Тогда при $0 \leq \xi < \xi_{inj}$ решение для границы плазменной полости $r_b(\xi)$ совпадает с решением для ненагруженной полости (2.63). Точке ξ_{inj} соответствует некий локальный радиус полости $r_{inj} = r_b(\xi_{inj})$ и электрическое поле $E_z(\xi_{inj}) = -E_{inj}$, которое может быть найдено из уравнения (2.64):

$$E_{inj} = -E_z(\xi_{inj}) = \frac{1}{r_{inj}} \sqrt{2F_1(r_{inj}, R_b)}. \quad (3.25)$$

Знак E_{inj} для удобства выбран положительным. При $\xi > \xi_{inj}$ будем искать такое решение для $\lambda(\xi)$, которое обеспечивает постоянство продольного поля $E_z(\xi) = -E_{inj}$ (см. Рис. 23). Используя (2.61), найдем условие на функцию Λ , обеспечивающую по-

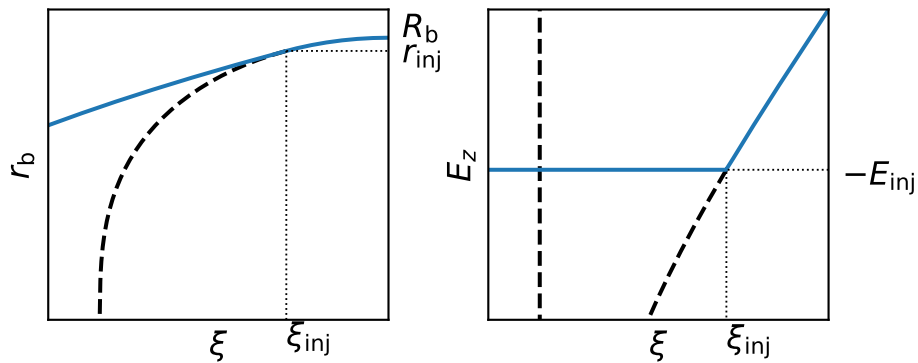


Рис. 23: Схематическое изображение искомой формы плазменной полости $r_b(\xi)$ и продольного электрического поля E_z в ней. Штриховой линией показано решение для ненагруженной плазменной полости.

СТОЯНСТВО ПОЛЯ:

$$E_{inj}^2 = \frac{1}{r_b^2} \left(2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_b}^{R_b} \frac{4S_i \Lambda}{r'} dr' \right) \quad (3.26)$$

Дифференцируя по r_b и заменяя $r_b(\xi)$ на r , получим явное выражение для $\Lambda(r)$:

$$\Lambda(r) = \frac{S_i(r)}{2} + \frac{E_{inj}^2 r^2}{2S_i(r)}. \quad (3.27)$$

Из уравнения (2.53) можем получить выражение для функции $\xi_b(r)$:

$$E_{inj} \cdot [\xi_b(r) - \xi_{inj}] = \int_r^{r_{inj}} \frac{S_i(r')}{r'} dr'. \quad (3.28)$$

Решение для $\Lambda(r)$ вместе с функцией $r_b(\xi)$, обратной к найденной $\xi_b(r)$, позволяет найти $\lambda(\xi) = \Lambda(r_b(\xi))$ для произвольной точки инъекции и произвольного профиля плазмы.

Длина ускоряемого сгустка ограничена длиной плазменной полости, поэтому предельную длину можно найти, подставив $r = 0$ в (3.28):

$$\Delta \xi = \frac{1}{E_{inj}} \int_0^{r_{inj}} \frac{S_i(r')}{r'} dr'. \quad (3.29)$$

Зная предельную длину сгустка, можно рассчитать максимальный допустимый заряд в нем:

$$Q_{max} = 2\pi \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{inj} + \Delta \xi} \lambda(\xi') d\xi' = -2\pi \int_0^{r_{inj}} \Lambda(r') \frac{d\xi_b}{dr} dr' = \frac{\pi F_i(0, R_b)}{E_{inj}}. \quad (3.30)$$

Можно заметить, что произведение $Q_{max} E_{inj}$, равное мощности, вырабатываемой полем полости по ускорению сгустка, не зависит от точки инъекции. Это значит, что путем выбора точки инъекции ξ_{inj} мы можем добиться нужного нам баланса между величиной ускоряемого заряда и темпом его ускорения. Интересно также то, что средняя плотность заряда в найденном нами сгустке

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\Delta \xi} \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{inj} + \Delta \xi} \lambda(\xi) d\xi = F_i(0, R_b) \left(\int_0^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' \right)^{-1} \quad (3.31)$$

совпадает с выражением (3.17) для пороговой плотности заряда λ_{th} в случае использования электронного сгустка прямоугольной формы. Как нетрудно убедиться, эффективность ускорения η для сгустка с наибольшим зарядом также равна 1, поскольку с учетом (3.14) $Q_{max}E_{inj} = P_{max}$. Таким образом, специальный подбор продольного профиля сгустка позволяет добиться его ускорения в однородном электрическом поле, причем эффективность ускорения при этом может достигать 100%.

В качестве одного из примеров рассмотрим плазму со степенным профилем $\rho_i(r) = (r/R_b)^n$. Для такого типа профиля функция $\lambda(\xi)$, задаваемая в параметрическом виде уравнениями (3.27, 3.28), может быть найдена аналитически:

$$\lambda(\xi) = \frac{r_{inj}^{n+2}}{2(n+2)R_b^n} - \frac{(n+2)E_{inj}}{2}(\xi - \xi_{inj}) + \frac{R_b^n E_{inj}^2 (n+2)}{2} \frac{1}{r_b^n(\xi)}, \quad (3.32)$$

где

$$r_b(\xi) = \left[r_{inj}^{n+2} - R_b^n E_{inj} \cdot (\xi - \xi_{inj})(n+2) \right]^{\frac{1}{n+2}}, \quad (3.33)$$

а E_{inj} определяется уравнением (3.25).

Профили сгустков, задаваемые уравнением (3.32) для профилей с различными показателями степени n , показаны на Рис. 24. Этот рисунок демонстрирует, что зависимость плотности заряда от координаты в таком сгустке является практически линейной. В случае однородной плазмы ($n = 0$) зависимость является строго линейной.

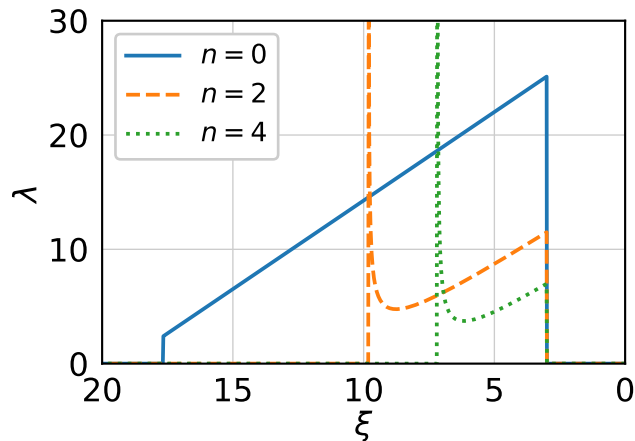


Рис. 24: Зависимости плотности заряда λ в ускоряемых сгустках от продольной координаты ξ , вычисленные по формуле (3.32) для степенных профилей плазмы $\rho_i \propto r^n$ с различными показателями степени n . Точка инъекции $\xi_{inj} = 3$, максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$.

ной, в то время как для $n > 0$ существует особенность в хвостовой части электронного сгустка, обусловленная занулением плотности плазмы при $r = 0$ для данных профилей. Эта особенность усложняет использование электронного сгустка наибольшей возможной длины, ограничивая эффективность ускорения.

На Рис. 25 показаны границы плазменных полостей и соответствующие продольные электрические поля для электронных сгустков с Рис. 24. Этот рисунок показывает, что продольное поле действительно является однородным в области, где присутствует электронный сгусток. Также видно, что присутствие электронного сгустка приводит к существенному удлинению плазменной полости. Рис. 24 и 25 также показывают, что полная мощность ускорения заметно меньше для плазмы с более глубоким каналом (т. е. с большими значениями n), что подтверждается уравнением (3.30), которое для степенного профиля имеет вид

$$Q_{\max} = \frac{1}{E_{\text{inj}}} \frac{\pi R_b^4}{2(n+2)^3}. \quad (3.34)$$

Это уравнение показывает, что произведение $Q_{\max} E_{\text{inj}}$, равное мощности ускорения, быстро уменьшается с увеличением n , соответствующим углублению канала в плазме.

Рассмотрим также плазму с полым каналом, для которого плотность опреде-

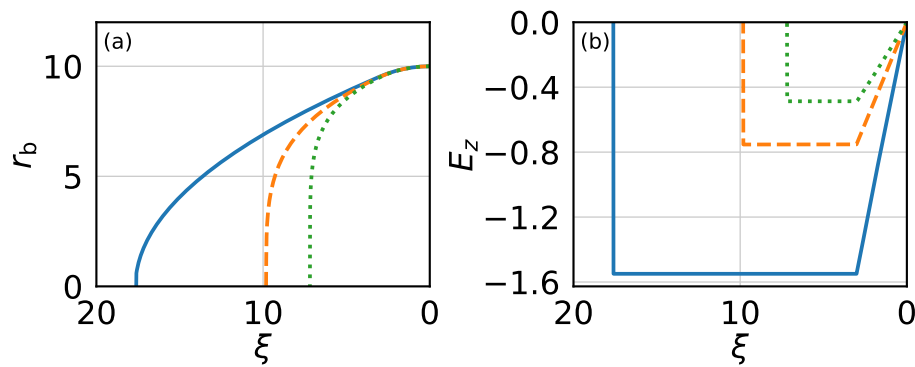


Рис. 25: Зависимости (а) границ плазменных полостей r_b и (б) продольных электрических полей E_z в них от продольной координаты ξ , рассчитанные численно по формулам (2.52) и (2.53) соответственно для степенных профилей плазмы $\rho_i \propto r^n$ с различными показателями степени n и электронных сгустков, определяемых выражением (3.32). Сплошная, штриховая и пунктирная линии соответствуют $n = 0, 2, 4$. Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$, точка инъекции $\xi_{\text{inj}} = 3$.

лена как $\rho_i = \theta(r - r_c)$. В этом случае профили электронных сгустков $\lambda(\xi)$, обеспечивающие однородность электрического поля, могут быть найдены численно; они показаны на Рис. 26. Форма этих электронных сгустков, как и в случае плазмы со степенным профилем, очень близка к трапецевидной. Они также обладают тем же свойством уменьшения полного заряда в сгустке при увеличении размера канала.

Для проверки возможности создания однородного ускоряющего поля в плазме с каналом при использовании специальным образом подобранного электронного сгустка было проведено трехмерное численное моделирование методом частиц в ячейках с использованием кода QUILL [133; 134]. Результаты этого моделирования показаны на Рис. 27. В моделировании использовалась плазма с каналом с плотностью плазмы снаружи канала $n_p = 4.5 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Плазменная полость создавалась электронным сгустком с полным зарядом 3.2 нКл и характерными продольным и поперечным размерами 6 мкм и 4 мкм соответственно. Ускоряемый сгусток имел такой же характерный поперечный размер, как и драйвер, в то время как его продольный профиль задавался уравнениями (3.27, 3.28). Энергия частиц в обоих сгустках равнялась 30 ГэВ. Сравнение результатов моделирования с аналитическими решениями показывает, что рассчитанный нами профиль электронного сгустка действительно позволяет создать участок однородного электрического поля. Таким образом, ускорение в плазменном канале и специальный подбор профиля сгустка позволяют

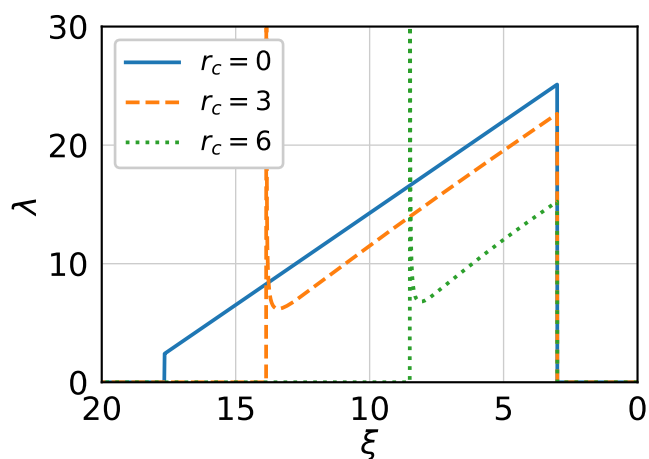


Рис. 26: Зависимости плотности заряда λ в ускоряемых сгустках от продольной координаты ξ для плазмы с полым каналом $\rho_i = \theta(r - r_c)$ для различных радиусов канала r_c . Зависимости рассчитаны численно по формулам (3.27) и (3.28). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$, точка инжекции $\xi_{inj} = 3$.

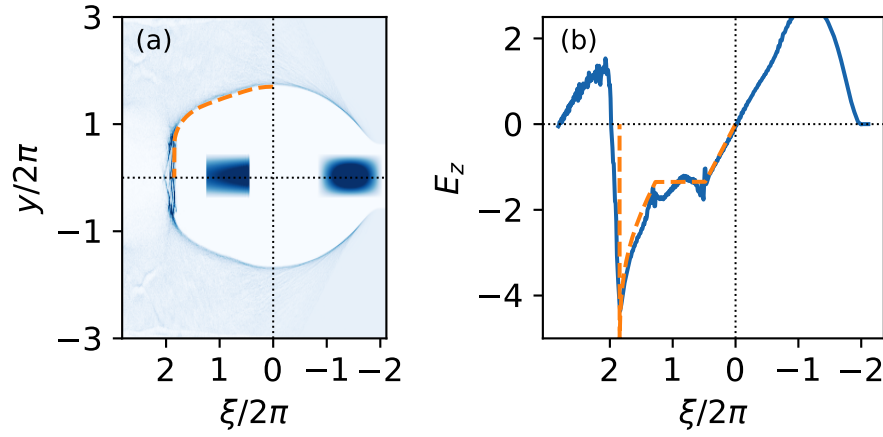


Рис. 27: (а) Плазменная полость (b) и усредненное по времени продольное электрическое поле E_z на оси полости для ускоряемого электронного сгустка с профилем, выбранным по формулам (3.27, 3.28). Радиус канала $r_c = 1.2\pi$. Аналитические решения, вычисленные по формулам (2.52) и (2.53), показаны штриховыми линиями. Все размеры нормированы на $\lambda_p = 5$ мкм.

ускорять электронный сгусток в однородном поле в отсутствие поперечной силы, действующей на него, что может позволить сохранить малый разброс по энергии и малый поперечный эмиттанс сгустка.

3.3 Бетатронные колебания в плазме с глубоким каналом

Кроме продольной силы, рассмотренной в разделе 3.2, на ускоряемые электроны действует также поперечная сила (3.6). В однородной плазме эта сила является линейной [88]:

$$F_r \approx -\frac{r}{2}. \quad (3.35)$$

Для электронов эта сила является фокусирующей и приводит к колебаниям электронов около оси кильватерной волны [137]. Подобные колебания называются *бетатронными*. В этом разделе будут рассмотрены особенности бетатронных колебаний в плазме с глубоким каналом.

Для простоты сначала рассмотрим движение электрона в отсутствие продольной силы. Будем рассматривать только плоские траектории электронов (без азимутального движения, $p_\phi = 0$) и для определенности рассмотрим плоскость (y, z) . То-

гда уравнения движения электрона запишутся в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{\gamma}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{y}{2}, \quad p_z = \text{const.} \quad (3.36)$$

где $\gamma = \sqrt{1 + p_y^2 + p_z^2}$. Здесь мы также предполагаем, что частица находится за пределами поля лазерного импульса. В случае, когда частицы релятивистские, причем их поперечный импульс мал по сравнению с продольным (т. е. $|p_r| \ll p_z$), Лоренц-фактор частицы $\gamma \approx p_z$ можно считать независимым от поперечного импульса. В этом случае уравнения (3.36) сводятся к уравнению гармонического осциллятора. Таким образом, фокусирующая сила (3.35) приводит к поперечным бетатронным колебаниям электронов с бетатронной частотой $\omega_{b0} = 1/\sqrt{2\gamma}$ (Рис. 28а).

Если же электрон, испытывающий бетатронные колебания, медленно (в масштабах периода колебаний) ускоряется или замедляется, то сохраняется адиабатический инвариант

$$\omega_{b0} p_{y,\text{max}}^2 = \text{const}, \quad (3.37)$$

что приводит к адиабатическому изменению амплитуды бетатронных колебаний по закону $y_{\text{max}} \propto \gamma^{-1/4}$, $p_{y,\text{max}} \propto \gamma^{1/4}$. Таким образом, амплитуда колебаний поперечного импульса при ускорении увеличивается, но при этом соотношение $p_{y,\text{max}}/p_z \approx p_{y,\text{max}}/\gamma \propto \gamma^{-3/4}$ уменьшается и критерий малости поперечного импульса $|p_y| \ll p_z$ остается в силе.

В случае плазмы с полым каналом с резкими стенками, для которой концентрация $\rho_i(r) = \theta(r - r_c)$, где $\theta(X)$ — степ-функция Хевисайда, поперечная сила может быть найдена из общего выражения (3.6):

$$F_r = -\theta(r - r_c) \frac{r^2 - r_c^2}{2r}, \quad (3.38)$$

Внутри канала из-за отсутствия ионов плазмы на электрон не действует поперечная сила, поэтому частица движется прямолинейно. В стенках канала электрон разворачивается (Рис. 28b). Рассмотрим влияние наличия канала на период бетатронных колебаний. Для электрона, обладающего поперечным импульсом $p_{y,\text{max}}$ на оси $r = 0$

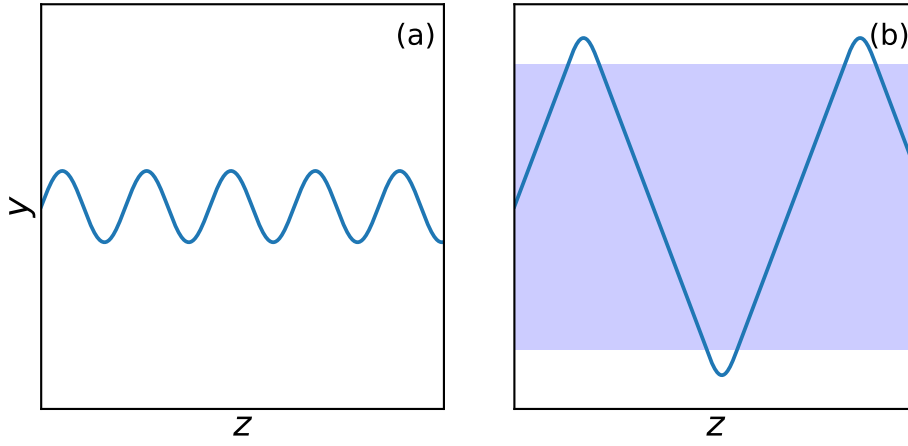


Рис. 28: Траектория бетатронных колебаний частицы (схематически) в (а) однородной плазме; (b) плазме с каналом (канал показан более темным фоном).

период можно записать как

$$T_b = 2\sqrt{2\gamma} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy'}{\sqrt{p_{y,\max}^2/2\gamma - U(y')}}}, \quad (3.39)$$

$$U(y) = \theta(|y| - r_c) \left[\frac{y^2 - r_c^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} \ln \left(\frac{|y|}{r_c} \right) \right], \quad (3.40)$$

где y_{\max} определяется из требования зануления знаменателя выражения. Период колебаний можно представить в виде суммы двух времен: $T_b = T_b^c + T_b^w$, где $T_b^c = 4r_c\gamma/p_{y,\max}$ — время движения электрона в канале (при $|y| < r_c$), T_b^w — время движения электрона в стенках канала (при $|y| > r_c$). Кривые, задаваемые выражением (3.39), показаны на Рис. 29.

Существует два предельных случая, при которых период (3.39) можно приближенно вычислить. В случае, когда электрон глубоко проникает в стенки канала (т. е. $y_{\max} \gg r_c$), наличие канала не оказывает существенного влияния, и период колебаний T_b будет близок к периоду бетатронных колебаний в однородной плазме: $T_b \approx T_{b0} = 2\pi\sqrt{2\gamma}$. Этот предельный случай реализуется при выполнении условия $p_{y,\max} \gg r_c\sqrt{\gamma}$ (см. пунктирные линии на Рис. 29). Поскольку в нашем рассмотрении поперечный импульс ограничен условием $p_{y,\max} \ll \gamma$, это приближение может быть справедливо только при достаточно узких каналах.

Другой предельный случай соответствует неглубокому проникновению электрона в стенки канала, т. е. $y_{\max} - r_c \ll r_c$. Тогда потенциал (3.40) можно приближенно

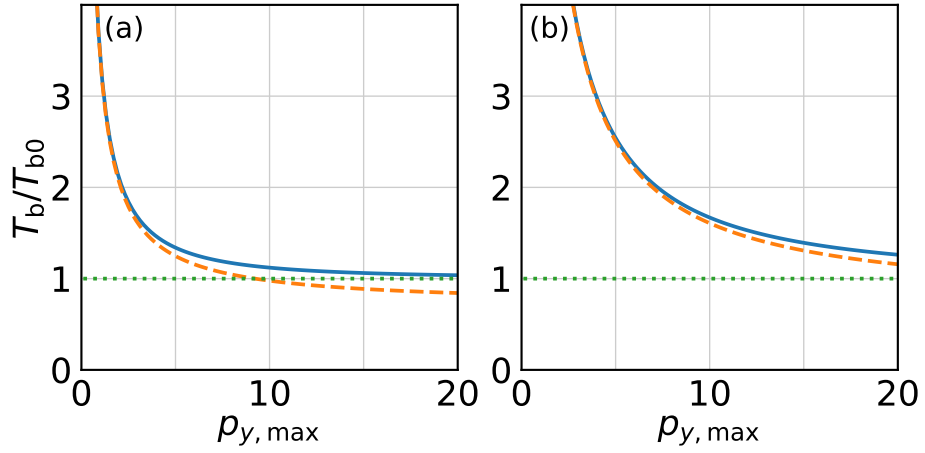


Рис. 29: Зависимость отношения периода бетатронных колебаний в плазме с каналом T_b к периоду колебаний в однородной плазме T_{b0} от поперечного импульса электрона для канала радиуса (а) $r_c = 0.3$, (б) $r_c = 1$. Штриховой линией показано решение (3.42) в приближении малого импульса, пунктирной — решение для однородной плазмы. Лоренц-фактор электрона $\gamma = 400$.

записать как

$$U(y) \approx \theta(|y| - r_c) \frac{(|y| - r_c)^2}{2}, \quad (3.41)$$

а соответствующая ему сила оказывается линейной: $F(y) \approx -(|y| - r_c)$ при $|y| > r_c$. Участок траектории электрона в стенках канала описывается уравнением гармонического осциллятора с фокусирующей силой, в два раза превышающей фокусирующую силу в однородной плазме, что, соответственно, приводит к уменьшению времени разворота в стенке канала в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со случаем однородной плазмы: $T_b^w = 2\pi\sqrt{\gamma}$. Таким образом, полный период колебаний в этом случае записывается как

$$T_b = 2\pi\sqrt{\gamma} + \frac{4r_c\gamma}{p_{y,\max}}. \quad (3.42)$$

Данное приближение справедливо при $p_{y,\max} \ll \sqrt{\gamma}r_c$ (см. штриховые линии на Рис. 29).

При адиабатическом изменении Лоренц-фактора частицы поперечный импульс частицы не может изменяться быстрее, чем $\gamma^{1/4}$ (в случае однородной плазмы). Таким образом, при ускорении частиц в плазменном канале величина $p_{y,\max}/\sqrt{\gamma}$ при достаточной ширине канала должна стать много меньше r_c , в результате чего будет справедливо второе приближение.

3.4 Бетатронное излучение в плазме с глубоким каналом

В прошлом разделе были рассмотрены бетатронные колебания как в однородной плазме, так и в плазме с каналом. В этом разделе рассмотрим излучение, вызванное этими колебаниями и носящее название *бетатронного излучения*.

Как известно, заряженные частицы, движущиеся с ускорением в вакууме, излучают электромагнитные волны [138]. При этом мгновенное излучение релятивистской частицы, движущейся по криволинейной траектории, сконцентрировано в очень узком телесном угле $\sim 1/\gamma$ в направлении ее движения (Рис. 28а). В случае, когда релятивистская частица испытывает бетатронные колебания в плазме, угол наклона траектории колеблется в пределах от 0 до $p_{y,\max}/p_z$. Если $1 \ll |p_{y,\max}| \ll p_z$, то $p_{y,\max}/p_z \gg 1/\gamma$, т. е. этот угол много больше угла мгновенного излучения частицы. Это означает, что бетатронное излучение будет наблюдаться преимущественно в направлении оси z под углами не более $p_{y,\max}/\gamma$, причем для заданного углового направления излучение будет приходить с очень малого участка траектории частицы и представляться в виде последовательности коротких импульсов (по два импульса за период бетатронных колебаний). В этом случае участок траектории, с которого приходит излучение в рассматриваемом направлении, можно приблизительно считать дугой окружности, что соответствует синхротронному режиму излучения, поэтому спектр бетатронного излучения частицы в этом направлении будет определяться только ее энергией и локальной кривизной соответствующего участка траектории [138].

Мощность синхротронного излучения пропорциональна квадрату кривизны траектории, поэтому наиболее интенсивно частицы излучают, находясь в точке траектории, наиболее удаленной от оси z и для которой кривизна максимальна. Излучение в этой точке направлено по направлению оси z , и его полный спектр определяется функцией S [103—105]:

$$\frac{dW}{d\omega} \propto S\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{cr}}}\right), \quad S(X) = X \int_X^{\infty} K_{5/3}(Y) dY, \quad (3.43)$$

где $K_{5/3}$ — функция Макдональда порядка $5/3$, $\omega_{\text{cr}} = 3\gamma^3/2R_{\text{curv}}$ — критическая частота, R_{curv} — радиус кривизны траектории электрона в точке $y = y_{\max}$. График функции

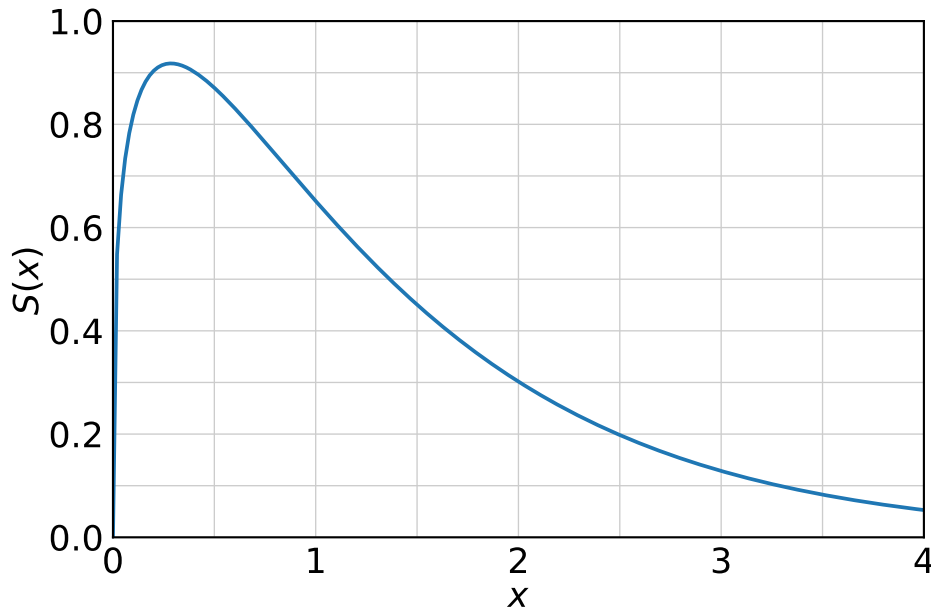


Рис. 30: График функции $S(x)$, задаваемой выражением (3.43).

$S(x)$ показан на Рис. 30.

Ширина спектра определяется критической частотой ω_{cr} , зависящей от радиуса кривизны траектории в точке наибольшего удаления от оси. Кривизна, в свою очередь, связана с поперечной силой, действующей на электрон: $R_{curv} = \gamma/|F_r(y_{max})|$. Критическая частота, соответственно, равна

$$\omega_{cr} = \frac{3}{2}\gamma^2|F_r(y_{max})|. \quad (3.44)$$

Рассмотрим, как соотносятся критические частоты в случае однородной плазмы и плазмы с каналом. С учетом (3.35) критическая частота для электрона в однородной плазме записывается как

$$\omega_{cr0} = \frac{3}{4}\gamma^2 y_{max} = 3 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{3/2} p_{y,max}. \quad (3.45)$$

Частота линейно растет с ростом поперечного импульса электрона.

Для плазмы с каналом критическая частота может быть найдена с использованием выражений (3.38, 3.40). В двух ранее рассмотренных предельных случаях можно получить аналитические выражения. В случае, когда электрон глубоко проникает в стенки канала ($y_{max} \gg r_c$), критическая частота будет близка к критической ча-

стоте ω_{cr0} в однородной плазме. В противоположном случае, когда $y_{\max} - r_c \ll r_c$, использование квадратичного приближения для потенциала (3.41) позволяет получить $\omega_{cr} \approx \sqrt{2}\omega_{cr0}$. Учет поправок следующего порядка малости позволяет получить:

$$\omega_{cr} \approx \sqrt{2}\omega_{cr0} \left(1 - \frac{p_{y,\max}}{3r_c\sqrt{\gamma}} \right). \quad (3.46)$$

Сравнение зависимостей критических частот от поперечного импульса для плазмы с каналом и для однородной плазмы представлено на Рис. 31. В режиме неглубокого проникновения электронов в стенки, который реализуется при ускорении электронов для достаточно широкого канала, критическая частота в плазме с каналом оказывается в $\sqrt{2}$ раз больше частоты в однородной плазме для той же плазменной концентрации, что эффективно соответствует увеличению концентрации плазмы в 2 раза.

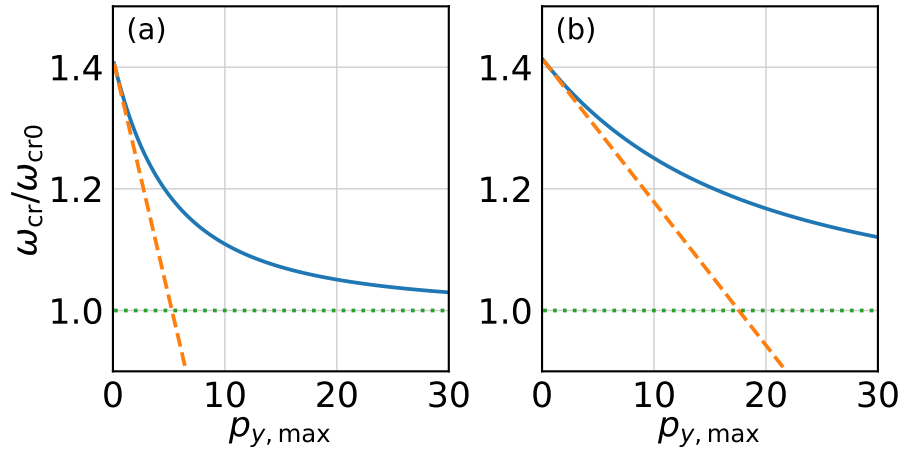


Рис. 31: Зависимость отношения критической частоты в плазме с каналом ω_{cr} к критической частоте в однородной плазме ω_{cr0} в зависимости от поперечного импульса электрона для канала радиуса (a) $r_c = 0.3$; (b) $r_c = 1$. Штриховой линией показано решение (3.46) в приближении малости импульса, пунктирной — решение для однородной плазмы. Лоренц-фактор электрона $\gamma = 400$.

3.5 Двухстадийный метод генерации бетатронного излучения

Для задач генерации излучения представляет интерес двухстадийная схема, в которой электронный сгусток захватывается и ускоряется в плазменной полости с одним набором параметров плазмы, а основное излучение происходит в плазме с

другим набором параметров. Из-за наличия разных наборов параметров плазмы в данном разделе будут использоваться размерные переменные, в которых критическая частота (3.45) в однородной плазме запишется как:

$$\omega_{\text{cr}} = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 \omega_p^2 y_{\text{max}}}{c}. \quad (3.47)$$

Сгусток, сформированный в однородной плазме с концентрацией n , имеет распределение по поперечным координатам и импульсам, в котором радиус сгустка r_0 и максимальный поперечный импульс p_{r0} связаны следующим образом:

$$p_{r0} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} m \omega_p r_0. \quad (3.48)$$

Здесь γ соответствует усредненному Лоренц-фактору электронов сгустка в предположении о его квазимоноэнергетичности. Как показывают эксперименты, лазерно-плазменные ускорители позволяют получить квазимоноэнергетические сгустки с разбросом электронов по энергии порядка нескольких процентов [65], который не окажет существенного влияния на спектр бетатронного излучения.

Поскольку мощность излучения пропорциональна амплитуде колебаний, наиболее интенсивно будут излучать электроны с максимальной амплитудой колебаний, поэтому спектр излучения будет приближенно соответствовать колебаниям с амплитудой $y_{\text{max}} = r_0$. Также, поскольку мощность синхротронного излучения пропорциональна $\gamma^4/R_{\text{curv}}^2$ (где R_{curv} изменяется не быстрее, чем $\gamma^{3/2}$) и тем самым сильно зависит от Лоренц-фактора электронов, наибольший вклад в спектр будет вносить излучение на участке траектории, на котором достигнута наибольшая энергия электронов (в случае ускорения — конечный участок, в случае замедления — начальный), поэтому критическая частота будет определяться Лоренц-фактором γ на этом участке. Кроме того, предположим, что ускорением электронов на второй стадии можно пренебречь.

Переход между двумя стадиями с разными параметрами плазмы будем считать достаточно коротким для того, чтобы параметры электронного сгустка на длине этого перехода оставались почти неизменными. Поскольку электронный сгусток является ультрарелятивистским, силами кулоновского расталкивания электронов на

этом участке можно пренебречь, т. к. их влияние уменьшается обратно пропорционально γ^2 ; нестационарность кильватерных полей на таком переходе, наблюдающаяся на расстояниях порядка нескольких плазменных длин волн (т. е. много меньших амплитуды бетатронных колебаний), также не может оказать существенного влияния на параметры сгустка. Поэтому изменение радиуса сгустка будет происходить вследствие угловой расходимости сгустка $\psi \approx p_{r0}/(mc\gamma)$. Наибольшую расходимость имеют траектории электронов, находящихся вблизи оси $r = 0$, поэтому приближенно оценить допустимую длину l перехода между двумя стадиями можно с помощью неравенства $l\psi < r_0$, которое, с учетом (13), приводит к соотношению $k_p l < \sqrt{2\gamma}$, где k_p — волновое число плазменных колебаний на первой стадии. Если это условие не выполнено, для сохранения параметров сгустка потребуется использовать внешнее воздействие.

Рассмотрим, как изменится критическая частота в спектре бетатронного излучения этого сгустка, если на второй стадии его направить в однородную плазму с концентрацией n' . В случае, если $n' > n$, радиус колебаний сгустка при таком переходе не изменится, т. е. $r'_0 = r_0$. Тогда, в соответствии с формулой (3.47), критическая частота на второй стадии равна:

$$\omega'_{cr} = \omega_{cr} \left(\frac{\omega'_p}{\omega_p} \right)^2 = \omega_{cr} \frac{n'}{n}. \quad (3.49)$$

Если же $n' < n$, радиус сгустка на второй стадии будет определяться радиусом колебаний электронов с наибольшим поперечным импульсом, который равен $p'_{r0} = p_{r0}$. В этом случае радиус колебаний в соответствии с (3.48) $r'_0 = \sqrt{n/n'} r_0$, что приводит к следующему соотношению на критическую частоту на второй стадии:

$$\omega'_{cr} = \omega_{cr} \sqrt{\frac{n'}{n}}. \quad (3.50)$$

Рассмотрим теперь случай, когда электронный сгусток с радиусом r_0 , сгенерированный в однородной плазме с концентрацией n попадает в плазму с каналом радиуса $r_c > r_0$ и концентрацией вне канала n' . Как показано в предыдущем разделе, в случае, когда электроны неглубоко проникают в стенки канала, т. е. $\max(r - r_c) \ll r_c$, критическая частота для одного и того же поперечного импульса электрона будет в

$\sqrt{2}$ раз больше критической частоты в однородной плазме с той же концентрацией. С учетом этого, а также соотношений (3.47) и (3.48)

$$\omega'_{cr} = \omega_{cr} \sqrt{\frac{2n'}{n}}. \quad (3.51)$$

Зависимости критической частоты на втором этапе от плотности плазмы в нем для случаев однородной плазмы и плазмы с широким каналом показаны на Рис. 32. Таким образом, ширина спектра излучения на втором этапе может позволить определить наличие или отсутствие канала в плазме.

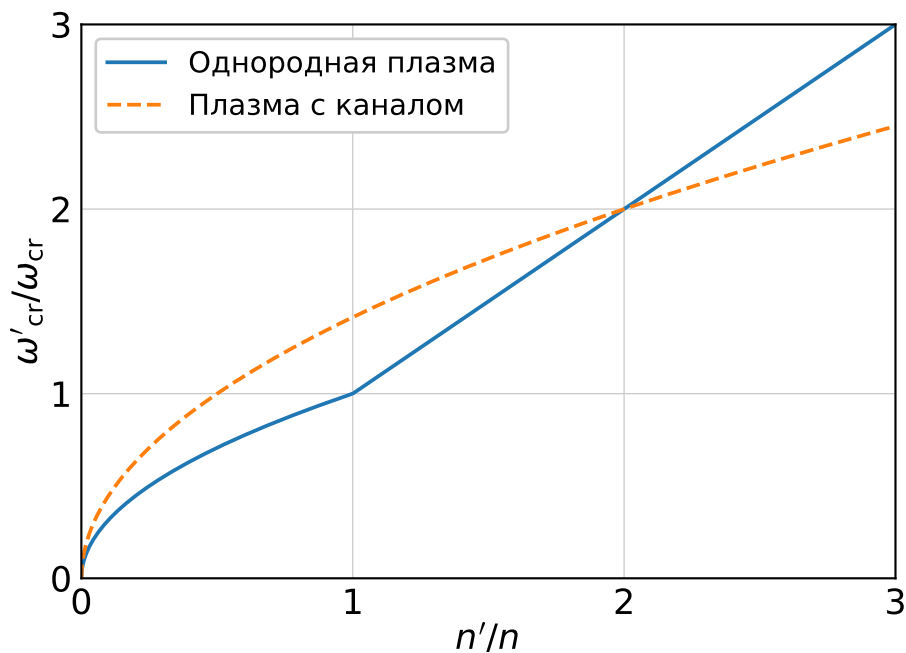


Рис. 32: Зависимость отношения критической частоты на втором этапе ω'_{cr} к критической частоте на первом ω_{cr} от соотношений концентраций плазмы для случаев однородной плазмы и плазмы с каналом на втором этапе.

3.6 Выводы

В этой главе рассмотрены процессы, происходящие с ускоряемым электронным сгустком в плазменной полости в плазме с поперечной неоднородностью. Было показано, что в плазменной полости в плазме с произвольным поперечным профилем продольная сила, ускоряющая или замедляющая частицы, зависит только от продольной координаты и определяется формой плазменной полости, а поперечная сила, ответственная за поперечные бетатронные колебания электронов, зависит

только от поперечной координаты. Было рассмотрено взаимодействие электронного сгустка с ускоряющим полем в плазменной полости. Найдена максимально возможная мощность, которую могут вырабатывать плазменные поля при ускорении сгустка, и на ее основе получена формула для оценки эффективности ускорения произвольного сгустка.

Рассмотрено ускорение сгустка с прямоугольным продольным профилем плотности заряда и показано, что существует пороговое значение плотности заряда, при которой достигается наиболее эффективное ускорение. При плотности ниже пороговой заряд сгустка оказывается меньше максимально возможного и часть энергии полости теряется, а при плотности выше пороговой задняя часть сгустка вместо ускорения в плазменной полости выступает в роли еще одного драйвера и начинает замедляться.

Также была исследована возможность подбора продольного профиля сгустка с целью воздействия на плазменную полость таким образом, чтобы он ускорялся в однородном поле. Такой профиль был найден в общем случае, при этом было показано, что он также обеспечивает ускорение с максимально возможной эффективностью. При использовании плазмы с полым каналом необходимый профиль сгустка в целом является трапециевидным, но в его задней части образуется сингулярность. Укорочение сгустка для избежания сингулярности понижает эффективность ускорения. Но при этом полый канал в плазме позволяет ускорять электронный сгусток с специально подобранным профилем в полностью однородном поле без воздействия на него поперечной фокусирующей силы, что должно положительно сказываться на его разбросе по энергии. Полученные результаты были проверены при помощи численного моделирования методом частиц в ячейках.

Естественно, поле не получится поддерживать однородным на протяжении всего процесса ускорения из-за отличия продольных скоростей электронов и фазовой скорости кильватерной волны, в результате чего электронный сгусток будет сдвигаться относительно плазменной полости и однородность поля нарушится. Тем не менее, степень однородности поля должна остаться выше, чем в случае ненагруженной плазменной полости.

Были исследованы особенности бетатронных колебаний и бетатронного излу-

чения в плазменной полости в плазме с полым каналом. В случае канала малого радиуса и глубокого проникновения электронов в его стенки влияние канала оказывается слабым, но при ускорении электронов должен реализовываться противоположный случай, когда электрон большую часть времени проводит в движении между стенками канала. В этом случае ширина спектра бетатронного излучения увеличивается по сравнению со случаем однородной плазмы. Рассмотрена двухстадийная схема генерации бетатронного излучения, в которой электронный сгусток, сгенерированный на первой стадии в однородной плазме с одной концентрацией, используется для генерации бетатронного излучения на второй стадии в плазме с другой концентрацией. Отдельно рассмотрены случаи однородной плазмы и плазмы с широким каналом на втором этапе и показано, как зависит критическая частота в излучаемом спектре от концентрации на втором этапе для этих двух случаев. Показано, что измерение ширины спектра может позволить определить наличие или отсутствие канала в плазме. Данное рассмотрение содержит определенный ряд допущений. В частности, при расчете настоящего спектра излучения электронного сгустка следует учесть излучение с остальных участков траекторий, а не только с точки разворота, в которой достигается максимум излучаемой мощности. Также в излучение электронов сгустка вносят вклад и электроны с меньшей амплитудой колебаний.

Основные полученные результаты опубликованы в работах [A3; A4; A6; A8; A11; A12].

4 Особенности сильно нелинейного режима кильватерной волны в двумерной геометрии

Несмотря на развитие теоретических методов описания кильватерной волны в сильно нелинейном режиме, в том числе представленных в главах 2 и 3, численное моделирование методом частиц в ячейках остается наиболее общим методом исследования взаимодействия лазерного излучения и пучков частиц с плазмой [85]. Главным недостатком полноразмерного моделирования в трехмерном пространстве является высокая вычислительная сложность. Для достижения хорошей точности моделирования взаимодействия лазера с плазмой зачастую необходимы распределенные многопроцессорные машины с сотнями гигабайт оперативной памяти, а один расчет может занимать несколько недель или даже месяцев. Это существенно ограничивает возможность проведения серий численных экспериментов в большом диапазоне параметров, поэтому нередко используются численные схемы, использующие упрощенные модели. Один из таких альтернативных способов — это моделирование в двумерном декартовом пространстве вместо трехмерного, что понижает размерность задачи и существенно уменьшает требования к вычислительным ресурсам. С точки зрения физической модели, это соответствует драйверу и кильватерной волне, размер которых в одном из поперечных направлений не ограничен. Несмотря на то что такая геометрия существенно отличается от реальных условий, двумерное моделирование активно используется в теоретических исследованиях, в частности, в работах [139—144]. Поэтому важно понимать разницу в структуре сильно нелинейной кильватерной волны в двумерной и трехмерной геометриях. Данная глава будет посвящена развитию модели плазменной полости в двумерной геометрии и оценке ее отличий от полости в трехмерном пространстве, при этом в модели будет использован профиль плазмы с поперечной неоднородностью.

4.1 Базовая модель

Модель плазменной полости в двумерной декартовой геометрии можно создать по аналогии с трехмерной моделью, предложенной в главе 2. В качестве продольной координаты (вдоль которой движется драйвер) выберем координату z , использованную ранее в трехмерной модели, а в качестве поперечной — координату y . При этом будем считать, что от x рассматриваемые в задаче величины не зависят. Концентрация плазмы имеет неоднородность по поперечной координате и задается функцией $\rho_i(y)$.

Если мы предположим симметрию задачи относительно плоскости $y = 0$, существует только три ненулевые компоненты электромагнитного поля:

$$E_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad E_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - B_x, \quad (4.1)$$

$$B_x = \frac{\partial A_y}{\partial \xi} + \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad (4.2)$$

где $\Psi = \varphi - A_z$ — кильватерный потенциал, $\xi = t - z$. Как и в трехмерном случае, используется квазистатическое приближение, поэтому и поля, и потенциалы зависят только от координат ξ и y . Для потенциалов используется калибровка Лоренца

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad A_y = -\int_0^y \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} dy', \quad (4.3)$$

в результате чего только $\Psi(\xi, y)$ и $A_z(\xi, y)$ остаются независимыми потенциалами. Уравнения для этих потенциалов в координатах (ξ, y) приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = J_z - \rho, \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -J_z. \quad (4.4)$$

интегрирование которых позволяет получить решения:

$$\Psi = -\int_y^\infty dy' \int_0^{y'} (J_z - \rho) dy'', \quad (4.5)$$

$$B_x = -\int_0^y \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + J_z \right) dy'. \quad (4.6)$$

Эти уравнения связывают величины Ψ и B_x с источниками J_z и $J_z - \rho$.

Для сильно нелинейного режима кильватерной волны мы используем феноменологическое описание, подобное приведенному в главе 2. Так же, как и в трехмерной модели (2.1), мы предполагаем, что внутри плазменной полости нет электронов плазмы, в то время как на ее границе находится тонкий электронный слой толщины Δ . В этом приближении источник $J_z - \rho$ для плазменной полости выглядит следующим образом:

$$J_z - \rho = \begin{cases} -\rho_i(y), & |y| < y_b(\xi), \\ S_0(\xi)g\left(\frac{|y| - y_b(\xi)}{\Delta}\right), & |y| > y_b(\xi). \end{cases} \quad (4.7)$$

В этой модели пространство разделяется на две области кривыми $\pm y_b(\xi)$, соответствующими границе плазменной полости. Произвольная функция $g(X)$ описывает форму электронного слоя на границе. Далеко снаружи плазменной полости, при $|y| \gg y_b$, плазма должна быть невозмущенной, поэтому функция $g(X)$ стремится к нулю. Как и в трехмерном случае, для простоты мы полагаем эту функцию нормированной таким образом, что $M_0(0) = M_1(0) = 1$, где моменты определены как

$$M_n(X) = \int_X^\infty g(Y)Y^n dY. \quad (4.8)$$

Чтобы неопределенный интеграл в (4.5) сходил, должно быть выполнено требование $\int_0^\infty (J_z - \rho) dy = 0$, что позволяет нам найти

$$S_0(\xi) = \frac{S_i(y_b(\xi))}{\Delta}, \quad (4.9)$$

где функция

$$S_i(y) = \int_0^y \rho_i(y') dy' \quad (4.10)$$

определена поперечным профилем плазмы. Таким образом, функция $y_b(\xi)$ полностью задает источник $J_z - \rho$, если свойства плазмы и электронного слоя запустулированы.

Пользуясь моделью источника $J_z - \rho$ и уравнением (4.5), можно вычислить

распределение кильватерного потенциала внутри плазменной полости:

$$\Psi(\xi, y) = \int_y^{y_b} S_i(y') dy' + \Delta S_i(y_b). \quad (4.11)$$

В соответствии с уравнениями (3.2, 3.3), которые справедливы и в двумерном случае, производные от кильватерного потенциала определяют силы, действующие на релятивистские частицы.

$$F_z(\xi) = -[S_i(y_b) + \Delta\rho_i(y_b)] \frac{dy_b}{d\xi}, \quad (4.12)$$

$$F_y(y) = -S_i(y). \quad (4.13)$$

Как и в аксиально-симметричном случае плазменной полости (см. (3.5, 3.6)), продольная сила зависит только от продольной координаты, а поперечная — от поперечной. Как и ожидалось, поперечная сила является фокусирующей для электронов. Однако амплитуда этой силы в двумерном случае оказывается иной. Например, если рассмотреть однородную плазму, т. е. $S_i(y) = y$, то фокусирующая сила в двумерной геометрии $F_y = -y$ остается линейной, но в два раза превышает силу $F_r = -r/2$, действующую на электрон в трехмерном случае. Это означает, что электроны в двумерном моделировании будут испытывать более сильную фокусирующую силу по сравнению с аналогичным трехмерным моделированием. Поскольку эта сила ответственна за поперечные бетатронные колебания электронов и результирующее бетатронное излучение (см. разделы 3.3 и 3.4), то подобное отличие может привести к существенному отличию в наблюдаемом в моделировании спектре бетатронного излучения.

Чтобы найти продольное поле $E_z(\xi)$ и соответствующую продольную силу F_z , необходимо знать форму границы плазменной полости $y_b(\xi)$. Как и в случае использования осесимметричной трехмерной модели (2.1), эта форма может быть найдена аналитически.

4.2 Уравнение для границы плазменной полости

При выводе уравнения (1.44) для траекторий электронов в кильватерной волне нами нигде явно не была использована аксиальная симметрия. Для его получения достаточно лишь того, чтобы движение электрона осуществлялось в плоскости. Поэтому это уравнение (с точностью до корректной замены координат) будет справедливо и при описании кильватерной волны в двумерном пространстве. Если снова заметить, что граница плазменной полости $y_b(\xi)$ также является траекторией электрона, уравнение (1.44) можно применить для его нахождения способом, полностью аналогичным способом получения уравнения (2.16).

Сначала найдем кильватерный потенциал на границе:

$$\Psi(\xi, y_b(\xi)) = \Delta S_i(y_b(\xi)), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(\xi, y_b(\xi)) = -S_i(y_b(\xi)), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\xi, y_b(\xi)) = [S_i(y_b) + \Delta \rho_i(y_b)] \frac{dy_b}{d\xi}, \quad (4.16)$$

а также из уравнения (4.6) рассчитаем

$$B_x(\xi, y_b) = - \int_0^{y_b} J_z(\xi, y') dy' - y_b \left[(\rho_i + \Delta \rho_i') \left(\frac{dy_b}{d\xi} \right)^2 + (S_i + \Delta \rho_i) \frac{d^2 y_b}{d\xi^2} \right]. \quad (4.17)$$

Если теперь подставить эти функции в (1.44), получим уравнение, описывающее границу плазменной полости

$$A(y_b) \frac{d^2 y_b}{d\xi^2} + B(y_b) \left(\frac{dy_b}{d\xi} \right)^2 + C(y_b) = \lambda + L. \quad (4.18)$$

Легко видеть, что форма этого уравнения полностью идентична уравнению (2.16) для границы плазменной полости в трехмерном случае. Это обыкновенное дифференциальное уравнение описывает эволюцию границы y_b плазменной полости с учетом источников λ и L . Отличными от уравнения (2.16) являются значения коэффи-

ЦИЕНТОВ:

$$A(y_b) = 1 + S_i y_b + S_i \Delta + \rho_i y_b \Delta, \quad (4.19)$$

$$B(y_b) = y_b \rho_i + \frac{S_i}{2} + y_b \rho_i' \Delta + \rho_i \Delta, \quad (4.20)$$

$$C(y_b) = \frac{1 + (1 + \Delta S_i)^2}{2(1 + \Delta S_i)^2} S_i. \quad (4.21)$$

Здесь $S_i \equiv S_i(y_b)$, $\rho_i \equiv \rho_i(y_b)$, $\rho_i' \equiv \rho_i'(y_b)$. Достаточно любопытно, что форма электронного слоя $g(X)$ вообще не входит в эти коэффициенты, что выгодно отличает этот случай от трехмерного. Это также подтверждает малую значимость выбора формы электронного слоя на границе плазменной полости. Источники в правой части определены как

$$\lambda(\xi, y_b) = - \int_0^{y_b} J_x(\xi, y') dy', \quad (4.22)$$

$$L(\xi, y_b) = - \frac{1}{2(1 + \Delta S_i)} \frac{\partial}{\partial y} \langle \mathbf{a}^2 \rangle \Big|_{y=y_b}. \quad (4.23)$$

Первый член (λ) описывает воздействие электронного драйвера и ускоряемых электронов на границу полости, а второй (L) — воздействие на него пондеромоторной силы лазерного импульса.

Чаще всего плазменная полость велика по сравнению с толщиной электронного слоя, $y_b \gg \Delta$. В то же время, обычно выполнен критерий применимости релятивистского приближения $S_i(y_b)\Delta \gg 1$ (см. аналогичное приближение в трехмерном случае в разделе 2.2). Для однородной плазмы эти условия соответствуют

$$y_b^{-1} \ll \Delta \ll y_b. \quad (4.24)$$

В рамках релятивистского приближения коэффициенты (4.19–4.21) упрощаются и уравнение (4.18) принимает вид:

$$S_i y_b \frac{d^2 y_b}{d\xi^2} + \left(\frac{S_i}{2} + y_b \rho_i \right) \left(\frac{dy_b}{d\xi} \right)^2 + \frac{S_i}{2} = \lambda + L. \quad (4.25)$$

При этом продольное электрическое поле может быть приближенно вычислено по

формуле:

$$E_z(\xi) \approx S_i(y_b(\xi)) \frac{dy_b}{d\xi}(\xi). \quad (4.26)$$

Мы предполагаем, что середина плазменной полости, т. е. точка, где она достигает максимального поперечного размера, расположена в $\xi = 0$, поэтому начальные условия соответствуют

$$y_b(0) = R_b, \quad \frac{dy_b}{d\xi}(0) = 0, \quad (4.27)$$

где R_b — максимальный поперечный размер полости.

4.3 Ненагруженная плазменная полость

Используем уравнение (4.25) для нахождения формы ненагруженной плазменной полости. В предположении, что в задней части плазменной полости ($\xi > 0$) нет источников, т. е. $\lambda = 0$, $L = 0$, решение уравнения (4.25) для $\xi > 0$ может быть найдено аналитически подобно тому как это сделано при получении решения (2.63) в трехмерном случае:

$$\xi = \int_{y_b(\xi)}^{y_0} \frac{\sqrt{y'} S_i(y') dy'}{\sqrt{\int_{y'}^{y_0} S_i^2(y'') dy''}}. \quad (4.28)$$

Это решение неявно определяет функцию $y_b(\xi)$ и позволяет легко найти полудлину плазменной полости ξ_{\max} , если учесть, что $y_b(\xi = \xi_{\max}) = 0$. Продольное электрическое поле в такой полости

$$E_z = -\sqrt{\frac{1}{y_b(\xi)} \int_{y_b(\xi)}^{y_0} S_i^2(y') dy'}. \quad (4.29)$$

В случае однородной плазмы, т. е. $\rho_i(y) = 1$, $S_i(y) = y$, и в отсутствие источников уравнение (4.25) можно записать как:

$$2y_b \frac{d^2 y_b}{d\xi^2} + 3 \left(\frac{dy_b}{d\xi} \right)^2 + 1 = 0. \quad (4.30)$$

Его можно сравнить с уравнением (2.29) для аксиально-симметричной плазменной

полости в однородной плазме:

$$r_b \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + 2 \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 + 1 = 0. \quad (4.31)$$

В то время как уравнение для аксиально-симметричной полости похоже на уравнение окружности, уравнение (4.30) напоминает уравнение для эллипса, у которого продольная полуось в $\sqrt{2}$ раз длиннее поперечной. Это можно показать, если явно найти решение уравнения (4.30) в окрестности середины плазменной полости ($\xi = 0$):

$$y_b \approx y_0 \left(1 - \frac{\xi^2}{4y_0^2} \right). \quad (4.32)$$

Это решение соответствует эллипсу с полуосями $\sqrt{2}R_b$ и R_b . Тем не менее, электрическое поле в двумерном случае

$$E_z \approx -\frac{\xi}{2} \quad (4.33)$$

имеет точно такой же градиент, как и в трехмерном (см. (2.70)).

Описанное выше поведение было продемонстрировано при помощи двумерного PIC моделирования с использованием кода Smilei [129; 130]. В этом моделировании в качестве драйвера использовался электронный сгусток с энергией 2 ГэВ, максимальной плотностью заряда $25n_p$, и продольным и поперечным размерами $2\lambda_p$ и $0.1\lambda_p$ соответственно. Данный драйвер возбуждал сильно нелинейную кильватерную волну в однородной плазме. Полученное распределение плотности электронов а также форма плазменной полости, рассчитанная в соответствие с уравнением (4.25), показаны на Рис. 33(a). Для сравнения аналитическое решение для аксиально-симметричной плазменной полости показано пунктирной линией. Легко видеть, что форма плазменной полости напоминает эллипс, вытянутый в продольном направлении. Она существенно отличается от типичной сферической полости в трехмерном случае, показанной на Рис. 33(b). Трехмерное моделирование также было выполнено с использованием PIC кода Smilei, в этом случае использовался электронный сгусток с максимальной плотностью $40n_p$ и продольным и поперечным размерами $1.6\lambda_p$ и $0.4\lambda_p$ соответственно.

Соответствующее продольное электрическое поле показано на Рис. 34. Резуль-

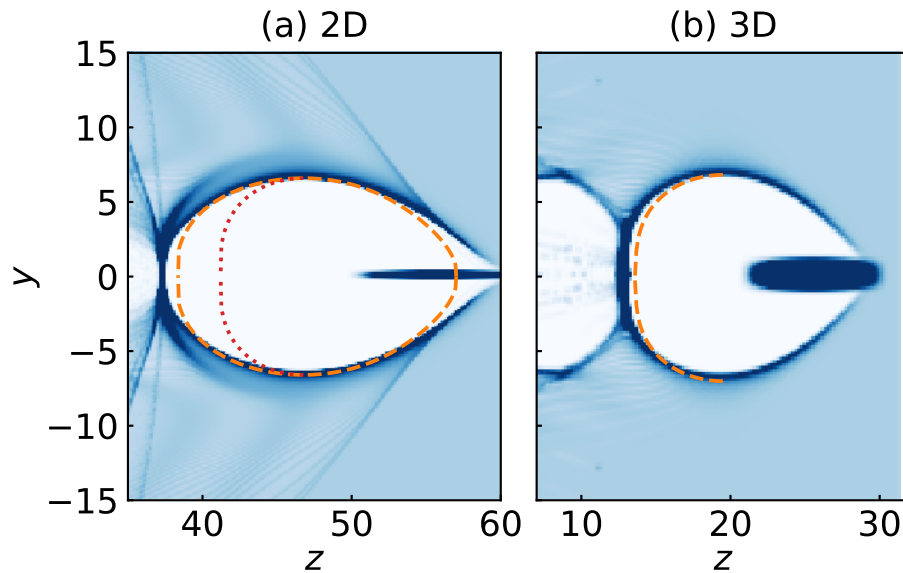


Рис. 33: Распределение концентрации электронов (а) в плазменной полости в двумерном пространстве, (б) в аксиально-симметричной плазменной полости в трехмерном пространстве. Плазменные полости генерируются электронными сгустками, движущимися вправо. Штриховые линии соответствуют аналитическим решениям для границы плазменной полости, задаваемыми уравнениями (4.25) и (4.31) соответственно. Для сравнения пунктирная линия в (а) также показывает решение для плазменной полости в трехмерном пространстве. Все размеры нормированы на $c/\omega_p = \lambda_p/2\pi$.

таты моделирования подтверждают аналитический вывод о том, что зависимость электрического поля от продольной координаты преимущественно линейная, а коэффициент этой линейной зависимости в однородной плазме как в трехмерном, так и в двумерном случае равен $1/2$.

Рисунки 33 и 34 показывают, что разработанная аналитическая модель достаточно точно описывает кильватерную волну. Отличия наблюдаются у передней и задней границ плазменной полости, где становится несправедливым предположение о том, что поперечный размер полости велик. По сравнению с обычной плазменной полостью в трехмерной геометрии, двумерная плазменная полость вытянута в продольном направлении. Однако при этом свойства продольного электрического поля остаются неизменными: оно не зависит от поперечной координаты, преимущественно линейно зависит от продольной координаты, а коэффициент линейной зависимости в однородной плазме такой же, как и в трехмерном случае. Это сходство очень важно, поскольку длина дефазировки, максимальная энергия, спектры элек-

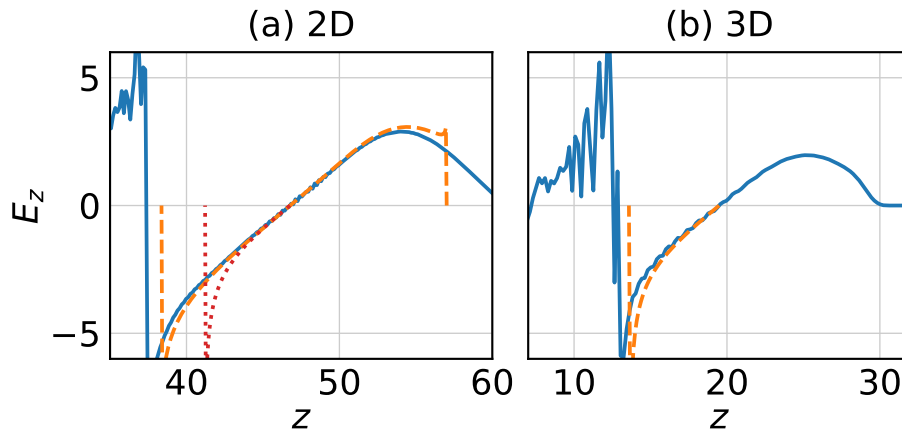


Рис. 34: Продольные электрические поля E_z в плазменных полостях, показанных на Рис. 33. Штриховые линии соответствуют аналитическим решениям, задаваемым уравнениями (4.26) и (2.53) соответственно. Для сравнения пунктирной линией в (а) показано аналитическое решение для аксиально-симметричной плазменной полости.

тронов определяются в основном этим полем. Оно может показывать, что ожидаемые свойства ускоренных электронных сгустков будут качественно похожими при проведении двумерных и трехмерных моделирований.

4.4 Псевдодвумерная плазменная полость в трехмерном моделировании

В трехмерном пространстве двумерная плазменная полость соответствует драйверу с бесконечным размером в одном из поперечных направлений. Это означает, что должно быть возможно создать псевдодвумерную плазменную полость в трехмерном пространстве, используя дискообразный электронный сгусток, у которого один из поперечных размеров сильно превышает второй. В качестве примера на Рис. 35 приведена плазменная полость, возбужденная электронным сгустком с максимальной плотностью заряда $25n_p$, продольным размером λ_p и поперечными размерами $0.1\lambda_p$ и $6.4\lambda_p$ в направлениях y и x соответственно. Эти параметры соответствуют двумерной плазменной полости, показанной на Рис. 33(a). Сравнение с Рис. 33(a) и аналитическим решением (штриховая линия на Рис. 35) показывает, что свойства плазменной полости в плоскости (z, y) действительно соответствуют свойствам полости в двумерной геометрии. В плоскости (z, x) (соответствующей плос-

кости дискообразного электронного сгустка) размер плазменной полости примерно равен размеру сгустка.

Продольное электрическое поле и поперечные силы в этой плазменной полости показаны на Рис. 36. Для сравнения штриховыми линиями также показаны поле и сила, предсказанные разработанной двумерной моделью. Сравнение показывает, что модель корректно описывает поля в плазменной полости. Очевидно, что в бесконечной в направлении x двумерной полости поперечная сила в этом направлении $F_x = 0$. При этом в квазидвумерной плазменной полости эта компонента все же присутствует. Она линейна в направлении x и фокусирующая для электронов, а ее величина существенно меньше, чем величина F_y . Поэтому эта сила будет отвечать за бетатронные колебания с большим периодом в направлении x . Эти осцилляции приведут к сжатию электронного сгустка в этом направлении. Соответственно, поскольку вследствие сжатия его поперечный размер в направлении x станет соизмерим с поперечным размером в направлении y , плазменная полость перестанет быть квазидвумерной после прохождения некоторого расстояния в плазме.

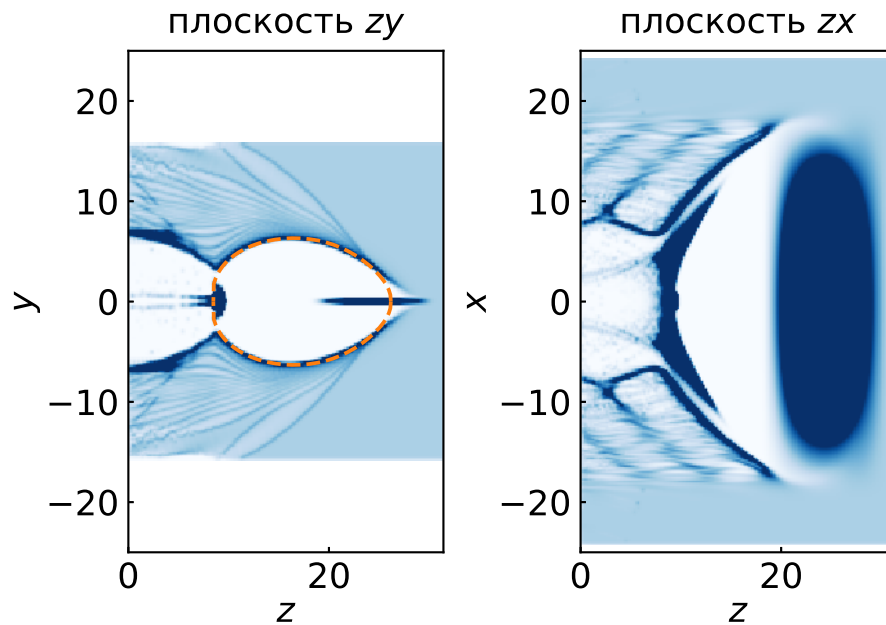


Рис. 35: Распределение концентрации электронов в плоскостях zy и zx в плазменной полости, возбужденной дискообразным электронным сгустком с различными поперечными размерами. Штриховая линия показывает аналитическое решение для двумерной плазменной полости в однородной плазме, рассчитанное по формуле (4.25). Все размеры нормированы на $\lambda_p/2\pi$.

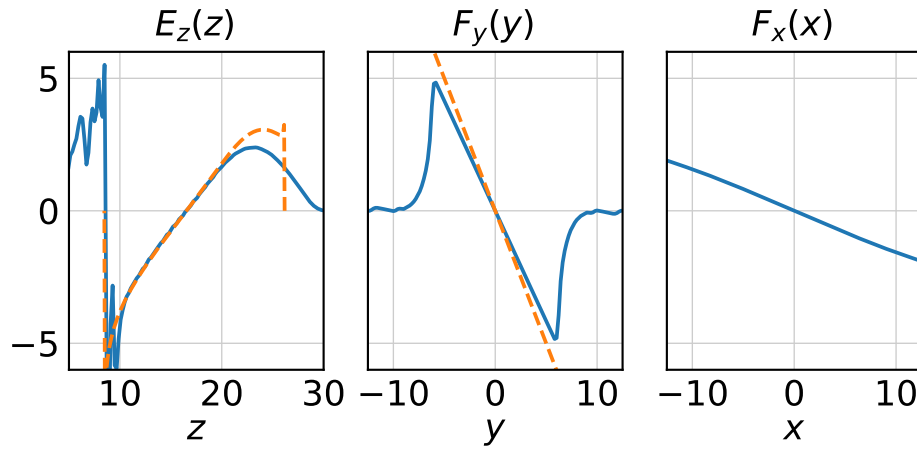


Рис. 36: Продольное электрическое поле E_x на оси и поперечные силы F_y и F_z в плоскости $x = 16.5$ в плазменной полости, показанной на Рис. 35. Штриховые линии соответствуют аналитическим решениям.

4.5 Выводы

В этом разделе была разработана феноменологическая модель, описывающая плазменную полость в двумерном пространстве. Эта модель похожа на модель аксиально-симметричной плазменной полости в трехмерном пространстве, предложенную в главе 2, и основана на предположении, что внутри плазменной полости нет электронов плазмы, а на ее границе находится тонкий электронный слой. В рамках модели было получено дифференциальное уравнение, описывающее границу плазменной полости, и приведено его аналитическое решение для ненагруженной полости. Предсказания модели были проверены путем сравнения с результатами двумерного моделирования методом частиц в ячейках. Также было показано, что в реальном трехмерном пространстве возможно создать квазидвумерную плазменную полость путем использования дискообразного электронного сгустка. Свойства такой плазменной полости оказываются похожими на свойства полости, наблюдаемой в двумерном моделировании.

Поскольку двумерное моделирование нередко используется вместо более затратного с точки зрения вычислительных ресурсов трехмерного, наиболее интересным результатом разработанной модели является отличие ускоряющих и фокусирующих полей в случае двумерной плазменной полости по сравнению с реалистичной аксиально-симметричной полостью в трехмерном пространстве. Данное сравне-

ние было проведено как аналитически, так и численно. Результаты демонстрируют, что плазменная полость в двумерном пространстве оказывается сильно вытянутой в продольном направлении по сравнению с практически сферической полостью в трехмерном случае. Однако структура сил, действующих на электроны внутри полости, оказывается практически такой же. Ускоряющая сила преимущественно линейна в продольном направлении и не зависит от поперечной координаты, а ее градиент в однородной плазме одинаковый в двумерном и трехмерном случаях. Поперечная сила, как и в трехмерном случае, имеет линейную зависимость от поперечной координаты и не зависит от продольной координаты, но ее величина в двумерном случае в два раза больше, чем в трехмерном. Подобное отличие должно существенно повлиять на бетатронные колебания электронов и, как следствие, на спектр бетатронного излучения.

Разумеется, разница в структуре кильватерной волны не единственное отличие, вызванное использованием двумерной геометрии. Так, самофокусировка лазерного импульса и самоинжекция и захват электронов также претерпевают сильные изменения [145]. Все подобные отличия должны быть учтены при использовании двумерного моделирования. Кроме того, законы подобия, выведенные для согласованного режима лазерно-плазменного ускорения в трехмерной сильно нелинейной волне [93] могут оказаться несколько другими в двумерном случае. Несмотря на то что подобная структура полей внутри плазменной полости должна приводить качественно к похожим результатам для длины дефазировки и максимальной энергии, численные коэффициенты могут быть другими, поэтому этот вопрос должен был исследован отдельно.

Основные полученные результаты опубликованы в работе [A10].

5 Моделирование ускорения электронов в плазменных мишенях с продольной неоднородностью

В главах 2–4 рассматривалось влияние поперечно-неоднородного профиля плазмы на ускорение в сильно нелинейном режиме кильватерной волны. В реальности кильватерная волна возбуждается в ограниченных в пространстве плазменных мишенях, поэтому концентрация плазмы изменяется по мере распространения в ней драйвера, то есть плазма обладает продольной неоднородностью. Как уже обсуждалось в главе 2, продольная неоднородность с масштабом больше плазменной длины волны слабо влияет на применимость квазистатического приближения, поэтому развитая в главах 2–4 теория применима и в этом случае. Однако многие эффекты, возникающие вследствие такой неоднородности, в частности сложная динамика лазерного импульса и процесс инжекции электронов в кильватерную волну, не могут быть описаны в рамках разработанных моделей. Поэтому данная глава посвящена исследованию ускорения электронов в мишенях с продольной неоднородностью при помощи методов численного моделирования.

Исследования велись в контексте проводимых в 2018 г. на лазерной установке субпетаваттного уровня мощности PEARL в ИПФ РАН [114] экспериментов по ускорению электронов в газовой ячейке. В связи с этим в теоретических исследованиях были использованы некоторые параметры, соответствующие параметрам установки. Тем не менее, поскольку установка PEARL является достаточно типичной лазерной установкой субпетаваттного уровня мощности, полученные результаты в целом характеризуют и другие возможные эксперименты на схожих лазерных системах. Предшествующие эксперименты на установке PEARL, в которых в качестве газовой мишени использовалась газовая струя, продемонстрировали возможность получения электронных сгустков с энергией в несколько сотен МэВ [146; 147]. Для повышения уровня энергии и стабильности экспериментов было принято решение использовать вместо газовых струй газовые ячейки.

5.1 Оценка параметров лазерно-плазменного ускорителя при использовании установки PEARL

Оценить общие требования к газовой мишени для используемого лазерного импульса можно, используя теоретические оценки, полученные для так называемого согласованного режима ускорения [93]. В этом режиме поперечный размер импульса согласован с концентрацией плазмы таким образом, что обеспечивается самоканалирование лазерного импульса в плазме за счет эффекта нелинейной самофокусировки. Оценку на размер лазерного импульса и плазменной полости в согласованном режиме можно получить из условия баланса между пондеромоторной силой, выталкивающей электроны, и силой притяжения со стороны ионов, оставшихся у оси [88; 96], при этом численный коэффициент 2 получен из результатов моделирования:

$$k_p R_b \approx k_p w_0 = 2\sqrt{a_0}, \quad (5.1)$$

где R_b — поперечный размер плазменной полости, $k_p = \omega_p/c$ — плазменное волновое число, $a_0 = \max eE_L/(mc\omega_L)$ — максимальная безразмерная амплитуда лазерного импульса. Критерий записан для линейной поляризации. Отметим, что в данной главе, в отличие от предыдущих, будут использованы физические единицы измерения вместо безразмерных. Сделанные в работе [93] теоретические расчеты, во многом основанные на ранних версиях феноменологической теории плазменной полости, изложенной в главе 2 (в частности, аналога формулы (2.70) для распределения поля в плазменной полости), позволяют оценить ожидаемые параметры ускоряемых электронных сгустков для известных параметров лазерного импульса и концентрации плазмы.

В качестве типичных параметров лазерного импульса с установки PEARL выберем лазерный импульс с длиной волны 910 нм, длительностью 60 фс (по полуширине по интенсивности) и полной энергией 15 Дж. В предположении гауссова временного профиля это соответствует пиковой мощности порядка 240 ТВт. Напрямую использовать такую пиковую мощность в оценках некорректно, поскольку поперечный профиль импульса не является гауссовым. На выходе с усилителя лазерный импульс установки PEARL имеет супергауссов профиль с широким плато и резки-

ми границами. Поскольку в области фокуса поперечное распределение переходит в собственный Фурье-образ, то распределение имеет вид, подобный $J_1(r)/r$, т. е. имеет центральный пик и множество колец меньшей интенсивности. Амплитуда лазерного поля в кольцах недостаточна для генерации нелинейной кильватерной волны, поэтому они не должны оказывать существенного влияния, однако в них содержится значительная доля полной энергии лазерного импульса. В качестве оценки возьмем мощность в центральном пике на уровне 60% от полной мощности лазерного импульса (145 ТВт) и предположим, что его форма близка к гауссовой. Это позволит нам сделать оценки, пользуясь результатами работы [93].

В первую очередь, необходимо определить наименьшую возможную концентрацию однородной плазмы, при которой возможно самоканалирование. Поскольку пиковая мощность лазерного импульса известна и не меняется (изменяются только параметры фокусировки), то его пиковая амплитуда и ширина жестко связаны между собой:

$$a_0 w_0 = \text{const.} \quad (5.2)$$

Таким образом, критерий (5.1) задает связь между a_0 в согласованном режиме и плазменным волновым числом k_p , а следовательно концентрацией плазмы n_p . С другой стороны, самоканалирование невозможно, если скорость дефокусировки на переднем фронте, где еще не сформировался фокусирующий плазменный канал, превысит скорость истощения лазерного импульса. Как следует из оценок в работе [93], это ограничивает a_0 снизу значением

$$a_0 > a_{0,\min} = \left(\frac{\omega_L}{\omega_p} \right)^{2/5}. \quad (5.3)$$

Для нахождения пороговой концентрации необходимо, чтобы оптимальное значение a_0 , задаваемое критерием (5.1), совпало с минимальным значением $a_{0,\min}$, при котором возможно самоканалирование. Сравнение этих двух величин в зависимости от концентрации плазмы для рассмотренных нами параметров лазерного импульса приведено на Рис. 37. Из этого рисунка следует, что пороговая концентрация составляет $1.3 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$, что соответствует плазменной длине волны 29.2 мкм. Отметим, что оптимальное значение a_0 для всех концентраций существенно выше 1,

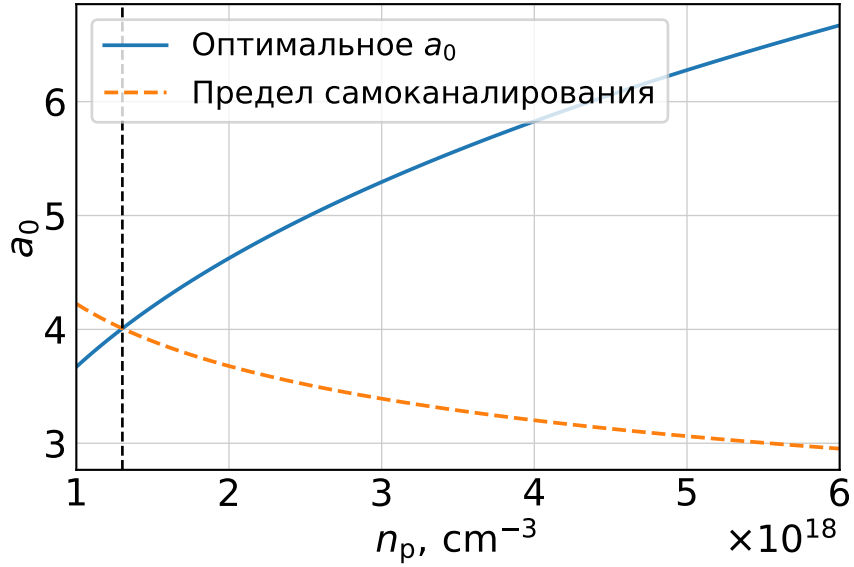


Рис. 37: Зависимости оптимального значения a_0 , задаваемого выражением (5.1), и минимального значения a_0 для обеспечения самоканалирования от концентрации плазмы.

что говорит о том, что кильватерная волна будет генерироваться в сильно нелинейном режиме. Таким образом, используемая концентрация должна быть не меньше пороговой, иначе лазерный импульс быстро дифрагирует и процесс генерации сильно нелинейной волны и ускорения электронов остановится.

Длина ускорения ограничена длиной дефазировки, т. е. расстоянием, на котором ускоряемые электроны успевают обогнать кильватерную волну и попасть в замедляющую фазу. В соответствии с работой [93] она оценивается по следующей формуле

$$L_d = \frac{2}{3} \frac{\omega_L^2}{\omega_p^2} w_0, \quad L_d[\text{мм}] \approx 6.81(P[\text{ТВТ}])^{1/6} (\lambda_L[\text{мкм}])^{-5/3} \left(\frac{n_p[\text{см}^{-3}]}{10^{18}} \right)^{-4/3}. \quad (5.4)$$

Эта длина может использоваться для оценки размеров газовой мишени. При ускорении на этой длине электроны могут быть ускорены до максимальной энергии

$$\Delta E = \frac{2}{3} mc^2 \frac{\omega_L^2}{\omega_p^2} a_0, \quad (5.5)$$

$$\Delta E[\text{МэВ}] \approx 283(P[\text{ТВТ}])^{1/3} (\lambda_L[\text{мкм}])^{-4/3} \left(\frac{n_p[\text{см}^{-3}]}{10^{18}} \right)^{-2/3}. \quad (5.6)$$

При этом ожидаемый заряд ускоряемого сгустка не зависит от концентрации плазмы и равен

$$Q[\text{пКл}] \approx 51.7\lambda_0[\mu\text{м}]\sqrt{P[\text{ТВт}]}. \quad (5.7)$$

Найдем теперь ожидаемые параметры мишени и получаемых ускоряемых электронных сгустков для нескольких значений концентрации выше пороговой. Результаты приведены в Таблице 1. В соответствии с известным свойством лазерно-плазменных ускорителей, длина дефазировки при увеличении концентрации плазмы убывает быстрее, чем растет градиент поля, и максимально достижимая энергия спадает с увеличением концентрации. В связи с этим с точки зрения достижения больших энергий рассматривать концентрации по порядку величины больше чем 10^{18} не имеет смысла. Для низких концентраций оценки предсказывают ускорение электронов до энергии больше 1 ГэВ. Характерная длина дефазировки при этом составляет несколько мм. Получить достаточно однородный профиль плазмы на такой длине при помощи газовой струи затруднительно, поэтому целесообразно в качестве газовой мишени использовать газовую ячейку. Стоит отметить, что хотя оценки приведены для параметров лазерной установки PEARL, по порядку величины они остаются справедливыми и для других установок субпетаваттного уровня мощности.

Концентрация n_p , см^{-3}	1.5×10^{18}	3×10^{18}	6×10^{18}
Плазменная длина волны λ_p , мкм	27.3	19.3	13.6
Безразмерная амплитуда a_0	4.2	5.3	6.7
Размер пятна w_0 , мкм	17.8	14.1	11.2
Длина дефазировки L_d , мм	10.6	4.2	1.7
Энергия ΔE , МэВ	1284	809	509
Заряд Q , пКл	567	567	567

Таблица 1: Ожидаемые параметры лазерно-плазменного ускорителя на основе установки PEARL для различных концентраций плазмы.

5.2 Моделирование распределения газа в газовой ячейке

Как показано в разделе 5.1, для лазерно-плазменного ускорения на установке PEARL оптимально использовать плазму с концентрацией порядка 10^{18} см⁻³ при длине ускорения порядка сантиметра. Для создания однородного профиля газа достаточной длины возможно использовать газовые ячейки [44; 50]. Расчет профиля газа в газовой ячейке может быть выполнен с использованием методов вычислительной гидродинамики. Подобный метод расчета приобретает большую популярность в последнее время [53; 86; 87; 148—150]. У проведения такого расчета есть два основных преимущества. Во-первых, моделирование позволяет оценить необходимые параметры газовой ячейки до ее изготовления. Во-вторых, рассчитанные профили газа могут быть использованы в моделировании лазерно-плазменного ускорения методом частиц в ячейках.

Для моделирования в работе использован открытый программный пакет *OpenFOAM* [151; 152], широко используемый для моделирования течений газов и жидкостей в науке и промышленности. Для решения был выбран солвер *sonicFoam*, позволяющий моделировать сверхзвуковое течение газов с учетом турбулентности. Качественное изучение течения газа в газовой ячейке может быть проведено с использованием двумерной модели ячейки, что позволяет сократить время вычислений. Простейшая модель односекционной газовой ячейки представлена на Рис. 38. Она состоит из основного объема, входного отверстия в верхней части, через которое газ поступает в газовую ячейку, и двух боковых отверстий на левом и правом торцах, через которые газ покидает ячейку. Боковые отверстия необходимы для прохождения через ячейку лазерного импульса вдоль оси, показанной на Рис. 38 штриховой линией. Полукруги по бокам используются для моделирования вакуума снаружи газовой ячейки: на внешней границе полукругов ставятся особые граничные условия, предотвращающие отражения и обеспечивающие асимптотическое стремление давления к нулю. Модель ячейки и сетка на ней созданы при помощи программы *gmsh* [153; 154]. Геометрические размеры используемой ячейки: длина 20 мм, ширина 5 мм, поперечный размер подводящей трубки 3 мм, поперечный размер выходных отверстий 1 мм.

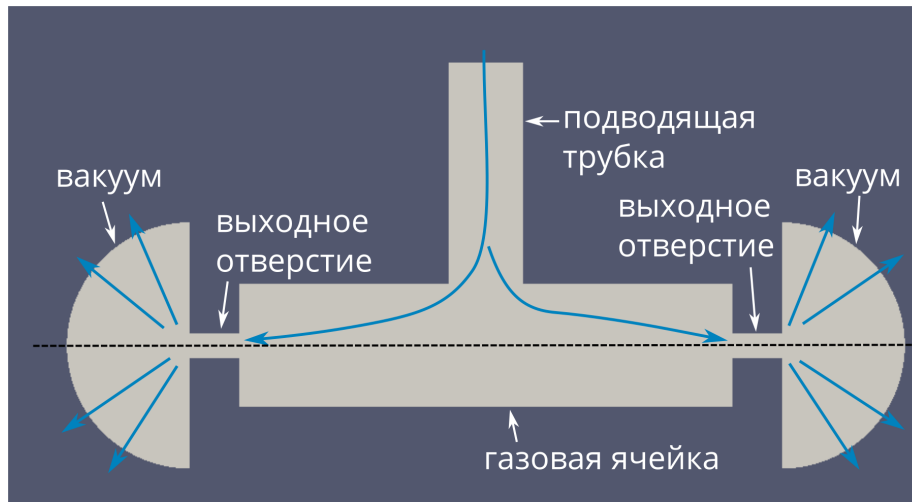


Рис. 38: Схема двумерной газовой ячейки. Стрелками показано течение газа в ячейке. Штриховая линия соответствует оси распространения лазерного импульса.

В моделировании в качестве рабочего газа использовался гелий при комнатной температуре 300 К и давлении 8 кПа. Ожидаемая плотность газа в стационарном состоянии при таких параметрах равна 12.8 г/м^3 , что при полной ионизации соответствует концентрации плазмы $3.9 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$, близкой к концентрациям, рассмотренным в разделе 5.1. Турбулентность учитывалась при помощи модели $k-\omega$ SST [155; 156], доступной в OpenFOAM. Учет мелкомасштабной турбулентности важен, поскольку она значительно ускоряет сходимость к стационарному состоянию за счет увеличенной вязкости и теплопроводности. При этом стоит отметить, что учет турбулентности не влияет на конечный результат, если устанавливается стационарное течение.

Установление стационарного течения достигалось двумя альтернативными способами. В первом все пространство изначально было заполнено газом под малым давлением 0.2 кПа, а давление на входе линейно нарастало с 0.2 кПа до 8 кПа на протяжении 100 мкс. В результате давление внутри газовой ячейки постепенно поднималось. Во втором способе изначально пространство заполнялось газом с давлением 8 кПа, при этом наличие вакуумных граничных условий приводило к истеканию газа и понижению давления. В обоих случаях обеспечивался переход к одному и тому же стационарному решению, показанному на Рис. 39(а). Характерное время установления такого режима составляло порядка 1 мс в обоих случаях. Внутри газовой ячейки плотность газа достаточно однородная, а снаружи она быстро спадает

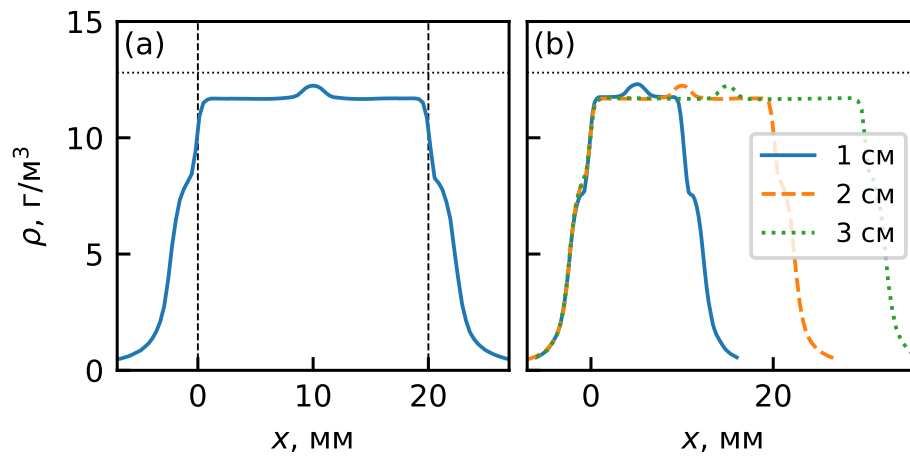


Рис. 39: (а) Плотность газа $\rho(x)$ на оси ячейки, показанной на Рис. 38. Вертикальные штриховые линии соответствуют границам ячейки. Горизонтальная пунктирная линия показывает ожидаемую плотность в стационарном состоянии при давлении 8 кПа и температуре 300 К. (б) Плотность газа для различных длин газовой ячейки (1, 2, 3 см).

за счет истечения газа в вакуум. При этом результирующий уровень плотности газа несколько ниже ожидаемого при давлении 8 кПа за счет наличия выходных отверстий.

Данная простая модель позволяет рассмотреть качественные зависимости профиля газа в газовой ячейке от ее параметров. Для этого была проведена серия численных расчетов с различными параметрами ячейки. В первую очередь было рассмотрено изменение длины и поперечного размера газовой ячейки. Поперечный размер не оказывает значительного влияния на профиль газа, а длина газовой ячейки позволяет задавать длину однородного профиля (Рис. 39(b)).

Наиболее важными параметрами газовой ячейки являются поперечные размеры входного и выходных отверстий, при этом их расположение относительно основного объема ячейки не существенно. Длина подводящей трубки также не оказывает заметного влияния на профиль газа. Длина выходных отверстий определяет расстояние, на котором плотность опускается до нуля (Рис. 40(a)), эта длина по сути определяется толщиной стенок газовой ячейки. Наибольшее влияние на профиль газа оказывает соотношение суммарного поперечного размера (эквивалентного площади в двумерной геометрии) выходящих отверстий и входного. Для параметров ячейки на Рис. 38 это соотношение равно $(1 + 1)/3 = 2/3$. Как показывает Рис. 40(b), пока это соотношение меньше 1, плотность внутри ячейки является однородной и

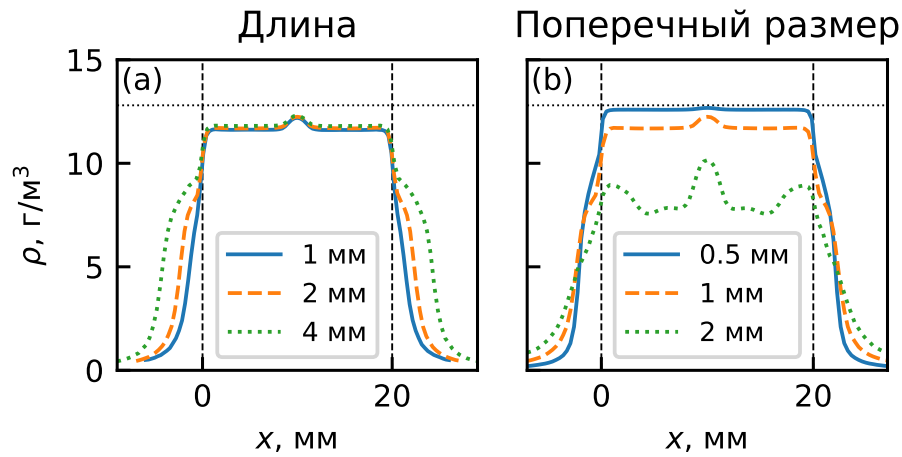


Рис. 40: Плотность газа на оси газовой ячейки (а) для различных длин выходных отверстий (1, 2, 4 мм), (б) для различных поперечных размеров выходных отверстий (0.5, 1, 2 мм) при размере входного отверстия 3 мм. Вертикальные штриховые линии показывают границу ячейки. Горизонтальные пунктирные линии показывают ожидаемую плотность в стационарном состоянии при давлении 8 кПа и температуре 300 К.

близкой к ожидаемому уровню плотности. Как только значение превышает единицу, плотность становится существенно меньше, поскольку размера входного отверстия не хватает для подвода достаточного количества газа. При этом поток становится сильно турбулентным и профиль плотности становится нестационарным. Поэтому на самом деле показанный на Рис. 40 профиль является профилем газа в некоторый фиксированный момент времени. Таким образом, для достижения оптимального однородного профиля размер выходящих отверстий нужно делать как можно меньшим. На практике размер выходных отверстий ограничен точностью позиционирования лазерного импульса и его поперечным размером: при непопадании лазерного импульса в отверстие может быть повреждена поверхность газовой ячейки.

Кроме того, размер выходных отверстий также оказывает существенное влияние на величину потока массы истекающего из ячейки газа. Поскольку в условиях эксперимента необходимо поддерживать вакуум снаружи газовой ячейки на всем протяжении его проведения, величина этого потока нужна для расчета требований к системе откачки газа и вакуумной камеры. Простую оценку на величину потока газа можно получить, предположив, что вытекающий газ имеет плотность ρ_0 , равную стационарной при заданном давлении на входе, а его характерная скорость соответ-

ствует тепловой скорости v_T :

$$\frac{dm}{dS dt} = \rho_0 v_T \approx 17.5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}. \quad (5.8)$$

Реальное значение должно быть ниже полученного по оценке, поскольку граница газ-вакуум не является резкой. Полученное в моделировании значение составляет $5.5 \text{ кг}/(\text{м}^2 \text{с})$.

Для сравнения также было проведено моделирование с использованием трехмерной модели газовой ячейки, показанной на Рис. 41. Эта модель, подобно двумерной модели на Рис. 38, содержит одну подводящую трубку в верхней части и два выходных отверстия по бокам. Профиль газа на оси такой ячейки показан на Рис. 42. В целом, наблюдаемые свойства профиля газа такие же, как в двухмерном случае: он однородный внутри газовой ячейки и спадает до нуля снаружи нее. Однако скорость этого спада отличается в трехмерной и двухмерной геометриях. В трехмерном случае фронт вытекающего и расширяющегося в вакуум газа представляет из себя полу-сферу, поэтому плотность спадает как $1/r^2$ с расстоянием r от границы ячейки. Эта скорость спадания быстрее, чем зависимость $1/r$, наблюдаемая в двухмерном случае. Тем не менее, двухмерная модель может быть использована для исследования общих свойств газовой ячейки, и использование трехмерной модели нецелесообразно из-за существенно большей вычислительной сложности расчетов.

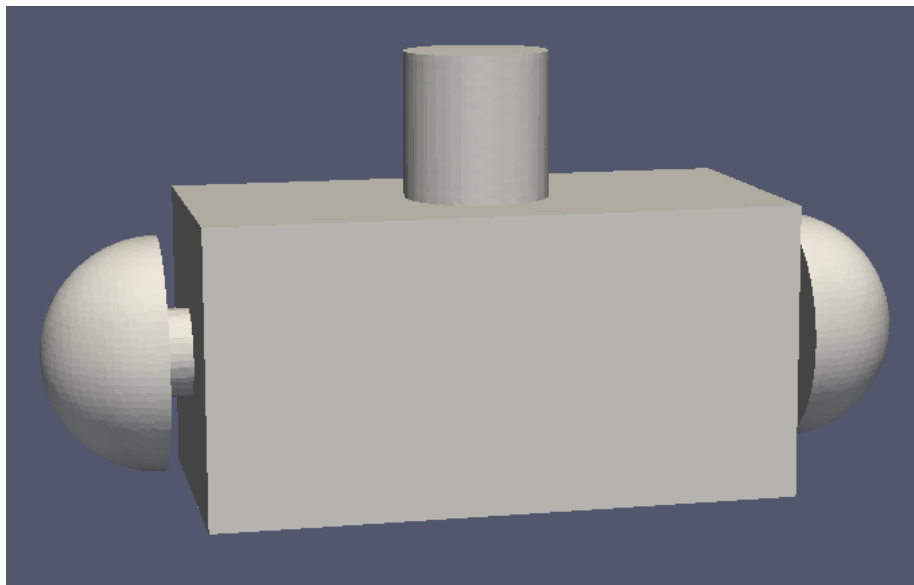


Рис. 41: Трехмерная модель газовой ячейки.

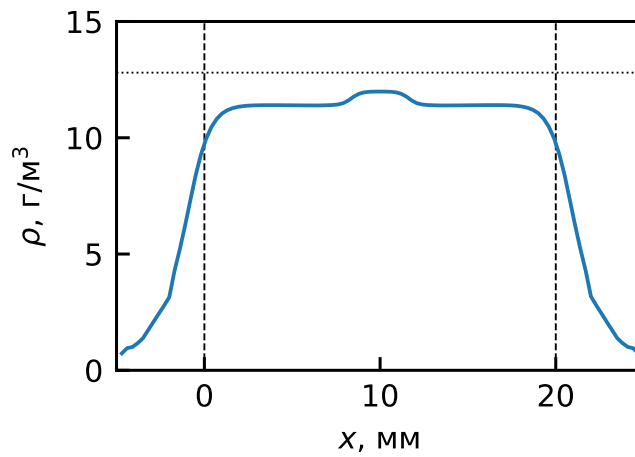


Рис. 42: Распределение плотности газа на оси газовой ячейки, показанной на Рис. 41. Вертикальные штриховые линии показывают границу ячейки, горизонтальная пунктирная — ожидаемую плотность в стационарном состоянии при давлении 8 кПа и температуре 300 К.

5.3 Двухсекционная газовая ячейка

Как показано в разделе 5.2, простая газовая ячейка может быть использована для создания однородного профиля газа. Однако интерес представляют и более сложные профили, в частности, профиль с двумя различными уровнями плотности. Модель газовой ячейки, позволяющей создать такой профиль, показана на Рис. 43. Она состоит из двух камер (секций), разделенных перегородкой с маленьким отверстием. У каждой секции есть собственная подводящая трубка, контролирующая профиль газа внутри газовой ячейки. Такая конфигурация газовой ячейки может быть использована следующим образом: первая, более короткая секция с более плотной плазмой является «инжектором», в котором электроны плазмы захватываются в



Рис. 43: Модель двухсекционной газовой ячейки.

плазменную волну посредством механизма самоинжекции [41]. Поскольку, как уже было замечено в разделе 5.1, максимально достижимая энергия ускоренных электронов обратно пропорциональна плотности плазмы, может оказаться более эффективным ускорять их в разреженной плазме во второй секции. К тому же, если плотность плазмы во второй секции будет ниже порога самоинжекции, не будут захватываться дополнительные электроны, и ускоряемый сгусток останется квазимоноэнергетическим. Еще одним применением двухсекционной газовой ячейки может служить создание участка с повышенной концентрацией плазмы в целях усиления бетатронного излучения [157].

При разработке двухсекционной газовой ячейки важно понимать, насколько большим может быть отношение между концентрациями газа в двух секциях. Очевидно, что из-за связи между секциями, газ будет перетекать из секции с большим давлением в секцию с меньшим, поэтому давление во второй секции не может быть произвольно малым. Чтобы определить наименее возможное давление, можно закрыть подачу газа через подводящую трубку второй секции. В моделировании это соответствует замене типа граничных условий на «стенку». Результаты подобного моделирования для различных поперечных размеров отверстия между секциями показаны на Рис. 44(а). Когда это отверстие сильно меньше, чем размер выходных отверстий (сплошная линия, отверстие в перегородке 0.2 мм, выходные — 1 мм), уровень концентрации во второй секции сильно меньше, чем в первой, поскольку газ покидает эту часть намного быстрее, чем втекает в нее. В противном случае (пунктирная линия, отверстие в перегородке 2 мм, выходные — 1 мм) газ не может быстро покинуть вторую секцию и двухсекционная ячейка эффективно становится похожей на односекционную. Таким образом, очень важно, чтобы размер отверстия между двумя секциями был настолько малым, насколько это возможно. Когда это условие выполнено, концентрации в двух секциях можно контролировать независимо, как показано на Рис. 44(б) для давлений в двух подводящих трубках в 8 кПа и 4 кПа соответственно.

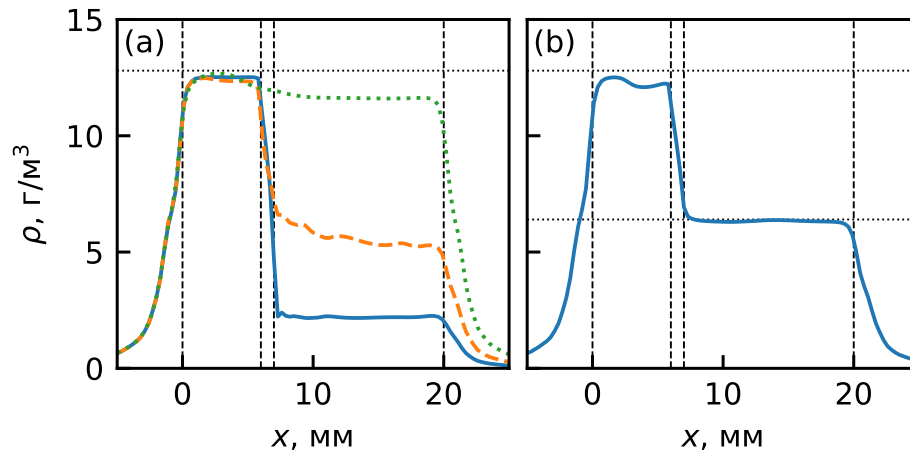


Рис. 44: (а) Распределения плотности газа в двухсекционной газовой ячейке без подводящей трубки во второй секции для различных поперечных размеров отверстия между двумя камерами. Сплошная, пунктирная и штриховая линии соответствуют размерам 0.2, 0.5, 2 мм соответственно; размер выходных отверстий 1 мм. (б) Распределение плотности газа в двухстадийной газовой ячейке для давлений в первой и второй подводящих трубках 8 кПа и 4 кПа соответственно. Размер выходных отверстий 1 мм, размер отверстия между двумя камерами 0.2 мм. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют ожидаемым уровням плотности при двух рассматриваемых давлениях. Вертикальные штриховые линии показывают границы камер.

5.4 Моделирование ускорения электронов в газовой ячейке

Профили газа, полученные при помощи моделирования течения газа в газовой ячейке пакетом OpenFOAM, могут быть использованы при проведении численного моделирования лазерно-плазменного ускорения методом частиц в ячейках для лучшего соответствия параметров моделирования реальному эксперименту. Для проведения такого моделирования использовалась двумерная модель газовой ячейки, показанная на Рис. 45. Данная модель соответствует газовой ячейке, изготовленной в ИПФ РАН для экспериментов по лазерно-плазменному ускорению на установке PEARL. Остальные параметры моделирования совпадали с параметрами, описанными в разделе 5.2. При подаче газа в данную газую ячейку под различными давлениями можно получить различные профили газа, показанные на Рис. 46.

Для использования в численном моделировании методом частиц в ячейках, профили плотности гелия были сконвертированы в профили концентрации электронов плазмы в предположении, что все атомы гелия полностью ионизируются. В PIC-моделировании были рассмотрены максимальные концентрации 1, 1.5, 2, 2.5



Рис. 45: Двумерная модель газовой ячейки. Затененные участки показывают границы со специальными граничными условиями (ГУ) для подводящей трубки и вакуума снаружи ячейки. Прочие границы имеют стеночные граничные условия.

и $3(\times 10^{18} \text{ см}^{-3})$. Длина газовой ячейки выбиралась намного большей, чем максимальная длина распространения лазерного импульса. Лазерный импульс, использованный в моделировании, соответствовал параметрам лазерной установки PEARL. Длина волны составляла 910 нм, длительность импульса 60 фс, полная энергия импульса 9 Дж, радиус пятна в перетяжке 30 мкм, соответствующий фокусировке $f/40$. При этом продольный и поперечный профиль лазерного импульса имели параболическую форму, достаточно близкую к гауссовой, но при этом ограниченную в про-

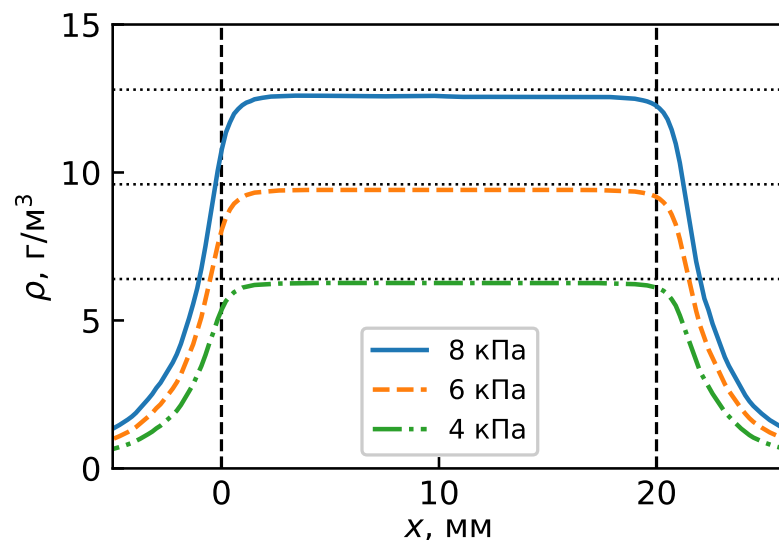


Рис. 46: Профили плотности газа в газовой ячейке, показанной на Рис. 45, для различных давлений газа на входе. Вертикальные штриховые линии показывают границы газовой ячейки. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют ожидаемым уровням плотности при рассматриваемых давлениях.

странстве. Как уже отмечалось в разделе 5.1, в эксперименте в области фокуса поперечный профиль лазерного импульса имеет сложную структуру с множественными кольцами помимо главного максимума. Эти кольца имеют сравнительно малую интенсивность, а их учет требует существенного увеличения области моделирования и, соответственно, используемой памяти и времени расчетов. Поэтому в моделировании было сделано предположение, что их влияние на результаты эксперимента мало, и моделировался только главный максимум. Как можно заметить из параметров моделирования, радиус пятна 30 мкм существенно превышает оптимальный размер в согласованном режиме плазменной полости (см. Таблицу 1). Использование в эксперименте зеркала $f/40$ связано с предварительными результатами на лазерном комплексе GEMINI [140; 158], в которых демонстрируются преимущества несогласованного режима.

Моделирование проводилось при помощи программного пакета QUILL [133; 134]. Для использования профилей газа, полученных из OpenFOAM, в моделировании В. С. Лебедевым был разработан дополнительный модуль для QUILL, позволяющий считывать продольный профиль плазмы из внешнего массива. Область моделирования имела пространственные размеры $1187 \times 324 \times 324$ ячеек в продольном и двух поперечных направлениях соответственно с шагами сетки, равными 0.10001λ в продольном и 0.4λ в поперечном направлениях, где λ — длина волны излучения. Шаг по времени равнялся $0.1\lambda/c$. Выбор таких достаточно крупных шагов связан с высокой требовательностью задачи к вычислительным ресурсам.

При моделировании были использованы некоторые методы, специально разработанные для задач лазерно-плазменного ускорения. В частности, стандартный метод FDTD (finite-difference time-domain, метод конечных разностей во временной области) решения дискретизированных уравнений Максвелла неприемлем для таких задач, поскольку вносит сильную численную дисперсию [159; 160]. Из-за численной дисперсии групповая скорость лазерного импульса уменьшается сильнее, чем из-за наличия разреженной плазмы, и как следствие кильватерная волна имеет неправильную фазовую скорость. Моделирование лазерно-плазменных ускорителей чрезвычайно чувствительно к этому численному эффекту, поскольку релятивистские электроны начинают обгонять кильватерную волну и попадают в замедля-

ющую фазу волны при существенно меньшей энергии, и длина дефазировки уменьшается. Скомпенсировать численную дисперсию в достаточной мере можно путем уменьшения шага сетки в сотни раз, что не представляется разумным. Поэтому в моделировании была использована альтернативная схема NDF (numerical-dispersion-free, свободная от численной дисперсии), компенсирующая численную дисперсию в направлении распространения лазерного импульса [85; 161]. Кроме того, поскольку размеры газовой ячейки на много порядков превосходят длину волны и размеры лазерного импульса, использовался метод «движущегося окна», в котором область моделирования перемещается в пространстве вместе с лазерным импульсом. Обычно скорость движения окна равняется скорости света или другой постоянной величине, задаваемой пользователем [129; 162—165]. Подобное решение неудобно при моделировании ускорения на длинных трассах: если пользователь неправильно подберет скорость окна, лазерный импульс может оказаться быстрее или медленнее его и через какое-то время покинет область моделирования. К тому же скорость лазерного импульса в плазме с продольной неоднородностью меняется во времени, Поэтому для комплекса QUILL был разработан новый алгоритм адаптивного движущегося окна, которое автоматически следует за лазерным импульсом. Этот алгоритм основан на детектировании повышения амплитуды поля в приграничной области пространства: при превышении порогового значения осуществляется перемещение окна на один шаг пространственной сетки.

Моделирование начиналось с расстояния 5 мм до левой границы газовой ячейки. Плазма снаружи ячейки являлась сильно разреженной, и взаимодействие лазерного излучения с ней не приводило к захвату электронов (Рис. 47(a)). После попадания импульса в более плотную плазму внутри газовой ячейки происходила его самофокусировка, его интенсивность увеличивалась, а в заднюю часть образованной плазменной полости инжектировались электроны плазмы (Рис. 47(b)).

На Рис. 48 показаны полные заряды захваченных быстрых (> 500 МэВ) электронов в зависимости от расстояния, пройденного лазерным импульсом в плазме. Расстояние 0 мм соответствует левой границе газовой ячейки (левая штриховая линия на Рис. 46), соответственно моменту начала моделирования сопоставляется -5 мм. В целом, бóльшие концентрации приводили к более ранней самоинжекции

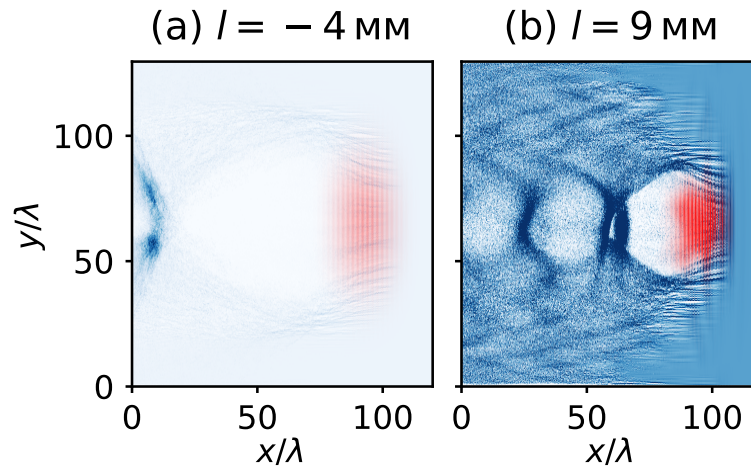


Рис. 47: Распределение интенсивности лазерного импульса и концентрации электронов плазмы (а) снаружи газовой ячейки ($l = -4$ мм) (б) внутри газовой ячейки ($l = 9$ мм). Концентрация плазмы $n_p = 1.5 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Дистанция l отсчитывается от левой границы газовой ячейки (см. Рис. 46). Лазерный импульс распространяется на рисунках вправо. Все размеры нормированы на лазерную длину волны $\lambda = 910$ нм.

электронов из-за более сильной самофокусировки, при этом максимальный заряд в целом также больше. Для концентрации $1 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ наблюдаемый сгусток имел очень малый заряд и возникал очень поздно; в экспериментах с более короткой газовой ячейкой длины 1–2 см такой сгустков не будет сформирован. Это наблюдение хорошо согласуется с предсказанной в разделе 5.1 пороговой концентрацией $1.3 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$, ниже которой лазерно-плазменный ускоритель не должен быть воз-

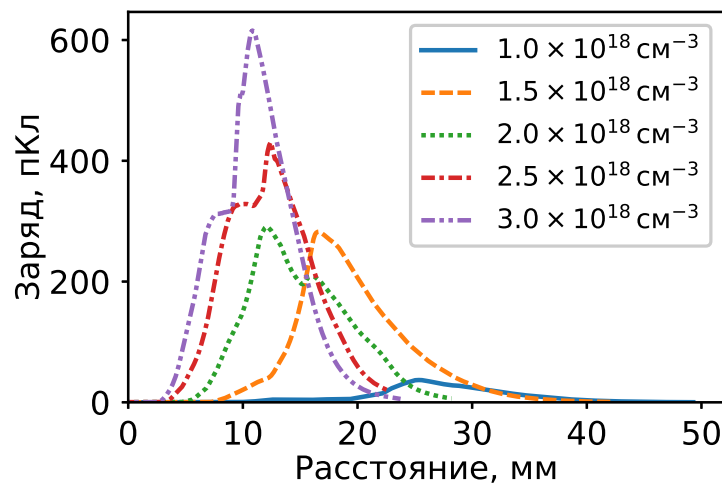


Рис. 48: Зависимость полного заряда электронов с энергией более 500 МэВ от расстояния, пройденного лазерным импульсом внутри ячейки, для различных максимальных концентраций электронов в плазме в PIC моделировании.

можен. Для двух наибольших величин концентрации плазмы также наблюдалось два последовательных момента активной самоинжекции (соответствующие двум резко растущим участкам графиков с плато между ними), что негативно сказывалось на спектре ускоренных сгустков. Наблюдаемые заряды в несколько сотен пКл характерны для лазерно-плазменного ускорения и по порядку величины согласуются с величиной 567 пКл, предсказанной из теоретических оценок (Таблица 1). Зависимость заряда от концентрации, которая отсутствует в теоретических оценках, может быть объяснена сложной динамикой лазерного импульса в плазме из-за использования несогласованного режима.

Зависимости спектров ускоренных электронов от расстояния, пройденного лазерным импульсом, показаны на Рис. 49 для всех концентраций кроме наименьшей ($1 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$). Достаточно хорошо видна параболическая форма кривых, соответствующая линейному в пространстве полю плазменной полости. Обрывание спектров и потеря заряда на Рис. 48 связаны с истощением лазерного импульса и прекра-

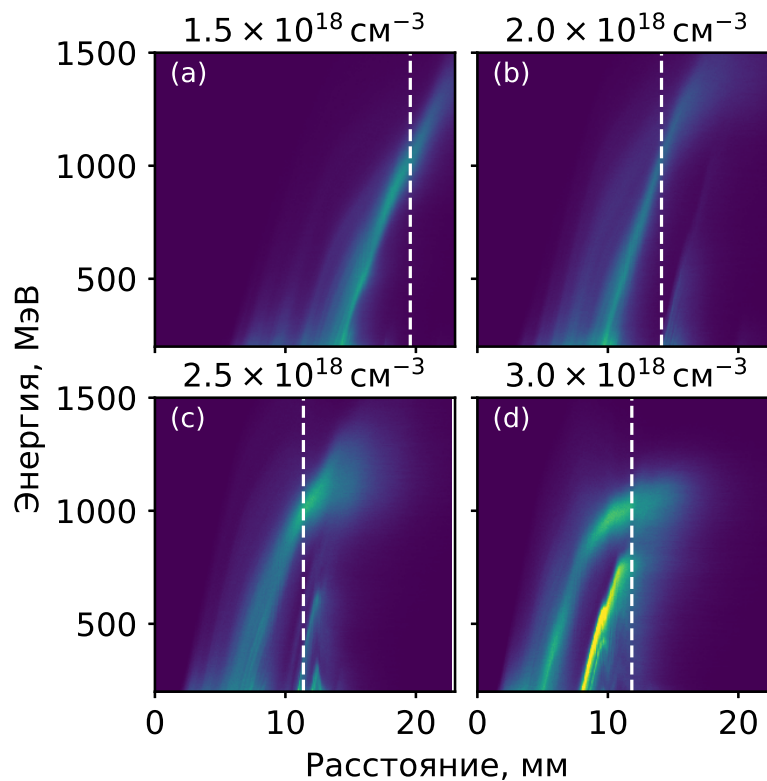


Рис. 49: Зависимости энергетических спектров электронов с энергией более 200 МэВ от расстояния, пройденного лазерным импульсом, для различных концентраций плазмы. Вертикальные линии соответствуют мгновенным спектрам, показанным на Рис. 50.

щением генерации плазменной полости, в результате чего в отсутствие фокусирующей силы ускоренный сгусток покидает область моделирования в поперечном направлении. Поэтому для достижения оптимального результата газовая ячейка должна быть короче, чем длина, на которой полностью истощается лазерный импульс. Примеры электронных спектров, соответствующие моменту, когда достигается минимум разброса по энергии для каждого случая (белые штриховые линии на Рис. 49), показаны на Рис. 50. Рис. 50(d) также наглядно демонстрирует два последовательно инжектированных сгустка, наблюдаемых на Рис. 48. Во всех случаях энергия достигает значений около 1 ГэВ, причем спектры являются квазимоноэнергетическими. Наименьший наблюдаемый разброс по энергии равен 8% по уровню 1/2 при энергии максимума 1 ГэВ для концентрации плазмы $2.5 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Подобный достаточно большой разброс характерен для лазерно-плазменных ускорителей с неконтролируемой самоинжекцией.

Проведем сравнение результатов моделирования с теоретическими оценками,

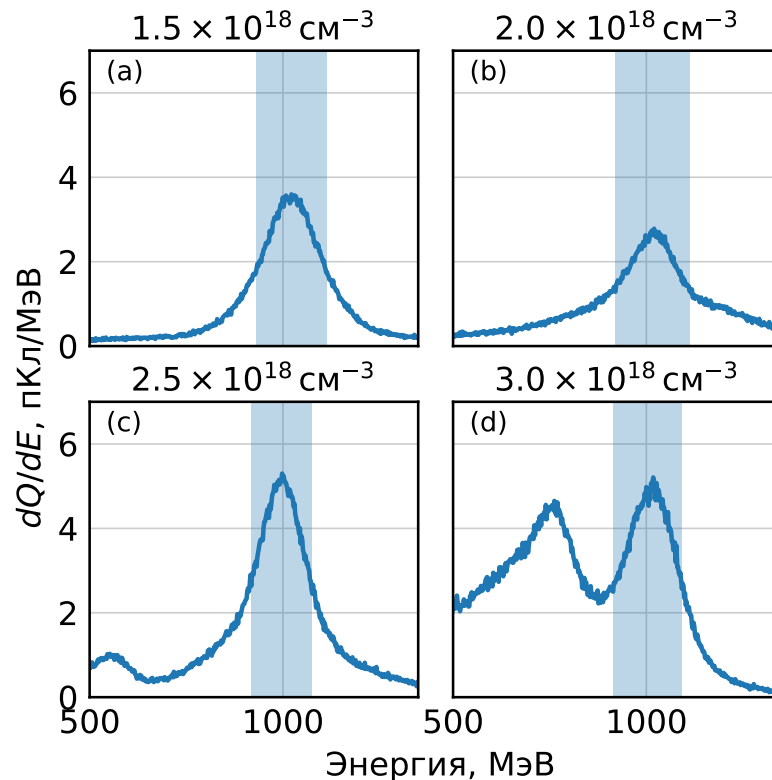


Рис. 50: Мгновенные энергетические спектры электронов для различных концентраций, соответствующие расстояниям, показанным вертикальными линиями на Рис. 49. Затемненные области соответствуют величине разброса по энергии по уровню 1/2 максимума.

приведенными в разделе 5.1, с точки зрения максимальной энергии. На Рис. 51 приведены полученные в моделировании энергии максимумов функции распределения электронов по энергии и положения верхней отсечки по уровню $1/e$, а также теоретическая кривая, основанная на формуле (5.6). В качестве данных моделирования брался максимум по всем возможным дистанциям распространения. Из сравнения видно, что результаты моделирования в целом превышают предсказания теории, но при этом обратная пропорциональность между максимальной энергией и концентрацией плазмы также наблюдается в моделировании. Несоответствие между теорией и моделированием может быть связано с несогласованным режимом кильватерной волны и сложной динамикой лазерного импульса в нем, а также с тем, что в теоретических оценках не учитываются некоторые эффекты, в том числе нагрузка плазменной полости ускоряемым сгустком, приводящая к изменению распределения поля (см. раздел 3.2), и его бетатронные колебания, приводящие к уменьшению продольной скорости (раздел 3.3). Кроме того, на графике для сравнения приведены данные экспериментов по ускорению электронов, проведенных на установке PEARL. Данные предоставлены А. А. Соловьёвым и С. Переваловым. Для каждого значения

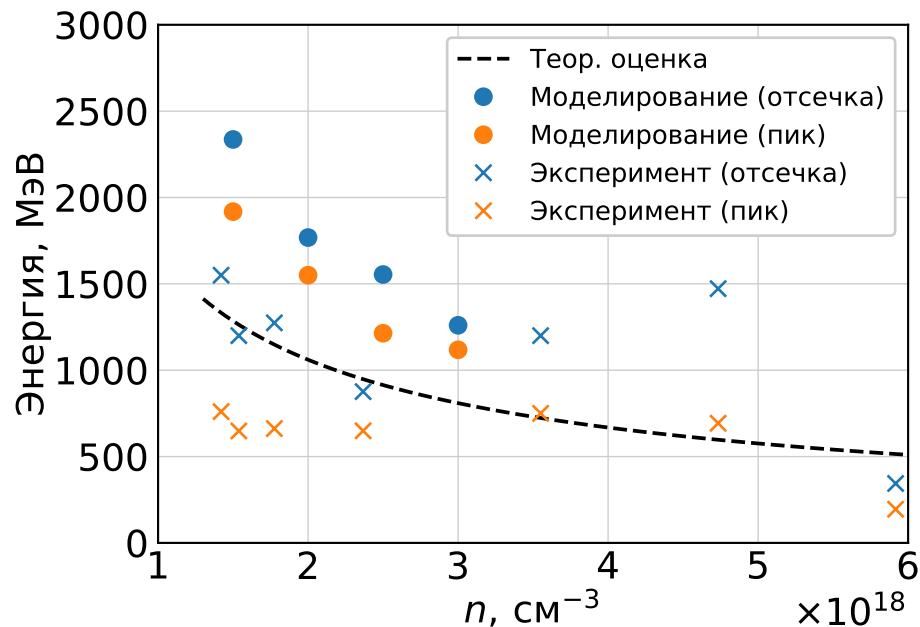


Рис. 51: Зависимости наибольших наблюдавшихся положений максимумов функции распределения электронов по энергий и отсечек (по уровню $1/e$ от максимума) в моделировании и экспериментальных данных. Штриховой линией показана теоретическая оценка по формуле (5.6).

концентрации на графике отражен наилучший с точки зрения энергии результат. Для малых концентраций наблюдаемые в экспериментах значения по порядку величины меньше, чем предсказанные в моделировании, но в целом тенденция на уменьшение энергии с концентрацией прослеживается.

5.5 Выводы

В данной главе представлены методы и результаты моделирования лазерного плазменного ускорения электронов в газовых ячейках с использованием лазерного импульса с установки PEARL. Теоретические оценки, основанные на теории подобия, показали, что для рассмотренных параметров лазера возможно получение ускоренных электронных сгустков с энергией выше 1 ГэВ и зарядом в несколько сотен пКл на длине ускорения порядка 1 см при использовании плазмы с концентрацией порядка 10^{18} см^{-3} . При концентрациях ниже невозможен режим самоканалирования лазерного импульса, а более высокие концентрации приводят к меньшей энергии ускоренных электронов. Обеспечить мишень требуемой длины позволяют газовые ячейки.

При помощи моделирования течения газа в двумерной и трехмерной моделях газовой ячейки с использованием программного пакета OpenFOAM было рассмотрено влияние параметров газовой ячейки на результирующий профиль плазмы. Также была рассмотрена более сложная двухсекционная газовая ячейка, позволяющая создать профиль газа с двумя участками с различным уровнем концентрации. Было продемонстрировано, что наибольшая достижимая разница в концентрации между двумя секциями определяется соотношением между размерами выходных отверстий газовой ячейки и размером отверстия в перегородке, разделяющей секции. Любую разницу меньше максимальной можно получить, используя две независимых подводящих трубки в секциях ячейки.

Профили газа, полученные из OpenFOAM для различных давлений, были использованы в моделировании лазерно-плазменного ускорения электронов для параметров импульса, соответствующих экспериментам на установке PEARL. В моделировании наблюдались квазимоноэнергетические электронные сгустки с энергиями

выше 1 ГэВ. Несмотря на количественное отличие полученных результатов от теоретических оценок, которое объясняется сложной динамикой лазерного импульса в несогласованном режиме, общее утверждение о преимуществе более разреженной плазмы с точки зрения энергии ускоренных электронов подтверждается численным моделированием.

Основные полученные результаты опубликованы в работах [A9; A15—A17].

Заключение

Кратко сформулируем основные научные результаты диссертационной работы:

1. Разработана модель плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме для произвольной формы электронного слоя на границе плазменной полости. В рамках модели было получено дифференциальное уравнение, описывающее форму границы плазменной полости в зависимости от поперечного профиля плазмы с учетом влияния лазерного импульса и сгустков заряженных частиц. Были найдены области параметров, при которых это уравнение существенно упрощается и может быть рассмотрено аналитически. В рамках такого аналитического рассмотрения было получено уравнение для формы ненагруженной плазменной полости, т. е. полости без ускоряемых электронных сгустков. Показано, что наличие канала в плазме приводит к укорочению плазменной полости и уменьшению амплитуды электрического поля в ней. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами полномасштабного трехмерного численного моделирования методом частиц в ячейках.
2. В рамках модели плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме и приближения малости толщины электронного слоя получены явные выражения для компонент электромагнитного поля как внутри полости, так и в электронном слое снаружи нее. Данные выражения могут быть использованы для расчета динамики электронов при их ускорении внутри плазменной полости, а также в процессе инжекции и самоинжекции. Полученные аналитические выражения хорошо согласуются с результатами трехмерного численного моделирования.
3. Рассчитано влияние произвольного электронного сгустка на форму плазменной полости в плазме с поперечной неоднородностью. Получено общее выражение для расчета эффективности ускорения электронного сгустка. Для прямоугольного ускоряемого сгустка было показано, что существует пороговое зна-

чение плотности его заряда, при превышении которого сгусток компенсирует притяжение ионов и предотвращает замыкание полости. При этом выбор значения плотности заряда, равного пороговому, позволяет добиться максимальной эффективности ускорения. Также было показано, что для произвольного поперечного профиля плазмы возможно подобрать такой профиль ускоряемого электронного сгустка, что его ускорение будет происходить в однородном электрическом поле. Это может позволить сохранить малый разброс по энергии частиц в ускоряемом сгустке. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами трехмерного численного моделирования методом частиц в ячейках.

4. Были рассчитаны характеристики бетатронных колебаний и бетатронного излучения электронов, ускоряемых в плазменной полости в плазме с полым каналом. Было показано, что существуют два предельных режима колебаний в зависимости от размера канала и амплитуды колебаний. В случае глубокого проникновения электронов в стенки канала его влияние оказывается несущественным, при этом период бетатронных колебаний и критическая частота спектра бетатронного излучения оказываются такими же, как в однородной плазме. В противоположном случае электрон проводит большую часть времени внутри канала, поэтому период его колебаний становится больше, а ширина спектра бетатронного излучения увеличивается. Предложен двухстадийный метод генерации бетатронного излучения при резком переходе электронного сгустка из плазмы с одним набором параметров в плазму с другими параметрами.
5. Разработана модель плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме в двумерном пространстве; получено дифференциальное уравнение, описывающее форму такой плазменной полости. Было показано, что по сравнению с аксиально-симметричной сферической полостью в трехмерном пространстве, плазменная полость в двумерном пространстве оказывается вытянутой в продольном направлении. При этом структура продольных и поперечных сил, действующих на ускоряемые электроны в двумерной геометрии сохраняется, но амплитуда поперечной фокусирующей силы оказывается в два раза больше,

чем в трехмерном пространстве. Эти отличия необходимо учитывать при интерпретации результатов двумерного моделирования задач плазменного ускорения. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами двумерного численного моделирования методом частиц в ячейках. Кроме того, при помощи численного моделирования была продемонстрирована возможность генерации квазидвумерной плазменной полости при взаимодействии дискообразного электронного сгустка с плазмой.

6. Были рассчитаны параметры ускоренных электронных сгустков, образующихся при взаимодействии лазерного импульса с газовой ячейкой. Профили газа в двумерной и трехмерной моделях газовых ячеек были получены при помощи моделирования течения газа программным пакетом OpenFOAM, в том числе для параметров, соответствующих экспериментам, проводимым на установке PEARL в ИПФ РАН. Численное моделирование взаимодействия методом частиц в ячейках для параметров лазерного импульса установки PEARL показало возможность получения квазимоноэнергетических электронных сгустков с энергией более 1 ГэВ. Также были рассчитаны профили газа в двухсекционной газовой ячейке и найдены условия, при которых в ней возможно создать стационарный профиль с двумя различными контролируруемыми уровнями концентрации.

Список литературы

1. *Wangler T. P.* RF Linear accelerators. — John Wiley & Sons, 2008.
2. Handbook of accelerator physics and engineering / A. W. Chao [et al.]. — World scientific, 2013. — DOI: 10.1142/8543.
3. Multipactor discharge on metals and dielectrics: Historical review and recent theories / R. A. Kishek [et al.] // Phys. Plasmas. — 1998. — Vol. 5, no. 5. — P. 2120–2126. — DOI: 10.1063/1.872883.
4. *Assmann R., Lamont M., Myers S.* A brief history of the LEP collider // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) — 2002. — Vol. 109, no. 2/3. — P. 17–31. — DOI: 10.1016/S0920-5632(02)90005-8.
5. The Stanford linear accelerator polarized electron source / R. Alley [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 1995. — Vol. 365, no. 1. — P. 1–27.
6. SLAC National Acceleration Laboratory, <https://www6.slac.stanford.edu/>.
7. The International Linear Collider Technical Design Report-Volume 1: Executive Summary / T. Behnke [et al.]. — 2013. — arXiv: 1306.6327 [physics.acc-ph].
8. International Linear Collider, <http://www.linearcollider.org/ILC>.
9. Overview of plasma-based accelerator concepts / E. Esarey [et al.] // IEEE Trans. Plasma Sci. — 1996. — Vol. 24, no. 2. — P. 252–288. — DOI: 10.1109/27.509991.
10. *Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Vol. 81, no. 3. — P. 1229–1285. — DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1229.
11. *Hooker S. M.* Developments in laser-driven plasma accelerators // Nature Photon. — 2013. — Vol. 7. — P. 775–782. — DOI: 10.1038/nphoton.2013.234.
12. *Костюков И. Ю., Пухов А. М.* Плазменные методы ускорения электронов: современное состояние и перспективы // УФН. — 2015. — Т. 185, № 1. — С. 89–96. — DOI: 10.3367/UFNr.0185.201501g.0089.
13. *Dawson J. M.* Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma // Phys. Rev. — 1959. — Vol. 113, issue 2. — P. 383–387. — DOI: 10.1103/PhysRev.113.383.

14. *Fainberg Ya. B.* // Proc. CERN Symp. on High-Energy Accelerators and Pion Physics. — 1956. — P. 84–90.
15. Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma / P. Chen [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 54, issue 7. — P. 693–696. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.54.693.
16. Experimental observation of plasma wake-field acceleration / J. B. Rosenzweig [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 61, no. 1. — P. 98. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.98.
17. Proton-driven plasma-wakefield acceleration / A. Caldwell [et al.] // Nature Phys. — 2009. — Vol. 5, no. 5. — P. 363. — DOI: 10.1038/nphys1248.
18. Demonstration of a positron beam-driven hollow channel plasma wakefield accelerator / S. Gessner [et al.] // Nature Commun. — 2016. — Vol. 7. — P. 11785. — DOI: 10.1038/ncomms11785.
19. AWAKE, The Advanced Proton Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN / E. Gschwendtner [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2016. — Vol. 829. — P. 76–82. — DOI: 10.1016/j.nima.2016.02.026.
20. *Tajima T., Dawson J. M.* Laser electron accelerator // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43, no. 4. — P. 267. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.43.267.
21. *Strickland D., Mourou G.* Compression of amplified chirped optical pulses // Opt. Commun. — 1985. — Vol. 55, no. 6. — P. 447–449. — DOI: 10.1016/0030-4018(85)90151-8.
22. *Dubietis A., Jonušauskas G., Piskarskas A.* Powerful femtosecond pulse generation by chirped and stretched pulse parametric amplification in BBO crystal // Opt. Commun. — 1992. — Vol. 88, no. 4. — P. 437–440. — DOI: 10.1016/0030-4018(92)90070-8.
23. The prospects for ultrashort pulse duration and ultrahigh intensity using optical parametric chirped pulse amplifiers / I. N. Ross [et al.] // Opt. Commun. — 1997. — Vol. 144, no. 1. — P. 125–133. — DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00399-4.
24. *Woodward P. M.* A method of calculating the field over a plane aperture required to produce a given polar diagram // J. Inst. Electr. Eng. Part IIIA. — 1946. — Vol. 93, no. 10. — P. 1554–1558. — DOI: 10.1049/ji-3a-1.1946.0262.

25. *Lawson J. D.* Lasers and Accelerators // IEEE Trans. Nucl. Sci. — 1979. — Vol. 26, no. 3. — P. 4217–4219. — DOI: 10.1109/TNS.1979.4330749.
26. Dielectric laser accelerators / R. J. England [et al.] // Rev. Mod. Phys. — 2014. — Vol. 86, issue 4. — P. 1337–1389. — DOI: 10.1103/RevModPhys.86.1337.
27. Coherent acceleration by laser pulse echelons in periodic plasma structures / A. Pukhov [et al.] // Eur. Phys. J. Spec. Top. — 2014. — Vol. 223, no. 6. — P. 1197–1206. — DOI: 10.1140/epjst/e2014-02173-3.
28. *Попов В. С.* Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) // УФН. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 921—951. — DOI: 10.3367/UFNr.0174.200409a.0921.
29. *Гапонов А. В., Миллер М. А.* О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотных полях // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34, № 2. — С. 242—243.
30. *Mora P., Antonsen Jr. T. M.* Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas // Phys. Plasmas. — 1997. — Vol. 4, no. 1. — P. 217. — DOI: 10.1063/1.872134.
31. *Gorbunov L. M., Kirsanov V. I.* Excitation of plasma waves by an electromagnetic wave packet // Sov. Phys. JETP. — 1987. — Vol. 66, issue 2. — P. 290–294.
32. High-brilliance betatron γ -ray source powered by laser-accelerated electrons / J. Ferri [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120, issue 25. — P. 254802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.254802.
33. Резонансное возбуждение кильватерных волн лазерным импульсом в плазме / Н. Е. Андреев [и др.] // Письма в ЖЭТФ. — 1992. — Т. 55. — С. 550.
34. The theory of laser self-resonant wake field excitation / N. E. Andreev [et al.] // Phys. Scr. — 1994. — Vol. 49, no. 1. — P. 101–109. — DOI: 10.1088/0031-8949/49/1/014.
35. *Esarey E., Krall J., Sprangle P.* Envelope analysis of intense laser pulse self-modulation in plasmas // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72, issue 18. — P. 2887–2890. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.72.2887.
36. *Kumar N., Pukhov A., Lotov K.* Self-Modulation Instability of a Long Proton Bunch in Plasmas // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104, issue 25. — P. 255003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.255003.

37. Seeding of self-modulation instability of a long electron bunch in a plasma / Y. Fang [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 112, issue 4. — P. 045001. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.045001.
38. *Lotov K. V.* Physics of beam self-modulation in plasma wakefield accelerators // *Phys. Plasmas*. — 2015. — Vol. 22, no. 10. — P. 103110. — DOI: 10.1063/1.4933129.
39. *Berezhiani V. I., Murusidze I. G.* Relativistic wake-field generation by an intense laser pulse in a plasma // *Phys. Lett. A*. — 1990. — Vol. 148, no. 6. — P. 338–340. — DOI: 10.1016/0375-9601(90)90813-4.
40. *Pukhov A., Meyer-ter-Vehn J.* Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime // *Appl. Phys. B*. — 2002. — Vol. 74, no. 4/5. — P. 355–361. — DOI: 10.1007/s003400200795.
41. Measurements of the critical power for self-injection of electrons in a laser wakefield accelerator / D. H. Froula [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103, no. 21. — P. 215006. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.215006.
42. Self-injection threshold in self-guided laser wakefield accelerators / S. P. D. Mangles [et al.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. — 2012. — Vol. 15, issue 1. — P. 011302. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.15.011302.
43. Direct Observation of the Injection Dynamics of a Laser Wakefield Accelerator Using Few-Femtosecond Shadowgraphy / A. Sävert [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115, issue 5. — P. 055002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.055002.
44. Self-Guided Laser Wakefield Acceleration beyond 1 GeV Using Ionization-Induced Injection / C. E. Clayton [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105, no. 10. — P. 105003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.105003.
45. Multichromatic Narrow-Energy-Spread Electron Bunches from Laser-Wakefield Acceleration with Dual-Color Lasers / M. Zeng [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114, issue 8. — P. 084801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.084801.
46. Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses / J. Faure [et al.] // *Nature*. — 2006. — Vol. 444, no. 7120. — P. 737–739. — DOI: 10.1038/nature05393.

47. A laser–plasma accelerator producing monoenergetic electron beams / J. Faure [et al.] // Nature. — 2004. — Vol. 431, no. 7008. — P. 541–544. — DOI: 10 . 1038 / nature02963.
48. High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding / C. G. R. Geddes [et al.] // Nature. — 2004. — Vol. 431, no. 7008. — P. 538–541. — DOI: 10 . 1038 / nature02900.
49. Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser–plasma interactions / S. P. D. Mangles [et al.] // Nature. — 2004. — Vol. 431, no. 7008. — P. 535. — DOI: 10 . 1038 / nature02939.
50. Generation of Stable, Low-Divergence Electron Beams by Laser-Wakefield Acceleration in a Steady-State-Flow Gas Cell / J. Osterhoff [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, no. 8. — P. 085002. — DOI: 10 . 1103 / PhysRevLett . 101 . 085002.
51. Demonstration of a narrow energy spread, textasciitilde0.5 GeV electron beam from a two-stage laser wakefield accelerator / B. B. Pollock [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107, no. 4. — P. 045001. — DOI: 10 . 1103 / PhysRevLett . 107 . 045001.
52. Improvements to laser wakefield accelerated electron beam stability, divergence, and energy spread using three-dimensional printed two-stage gas cell targets / M. Vargas [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2014. — Vol. 104, no. 17. — P. 174103. — DOI: 10 . 1063 / 1 . 4874981.
53. 2D hydrodynamic simulations of a variable length gas target for density down-ramp injection of electrons into a laser wakefield accelerator / O. Kononenko [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2016. — Vol. 829. — P. 125–129. — DOI: 10 . 1016 / j . nima . 2016 . 03 . 104.
54. Improvement of electron beam quality in optical injection schemes using negative plasma density gradients / G. Fubiani [et al.] // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, issue 2. — P. 026402. — DOI: 10 . 1103 / PhysRevE . 73 . 026402.
55. Plasma-Density-Gradient Injection of Low Absolute-Momentum-Spread Electron Bunches / C. G. R. Geddes [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100, issue 21. — P. 215004. — DOI: 10 . 1103 / PhysRevLett . 100 . 215004.
56. Down-ramp injection and independently controlled acceleration of electrons in a tailored laser wakefield accelerator / M. Hansson [et al.] // Phys. Rev. ST Accel.

- Beams. — 2015. — Vol. 18, issue 7. — P. 071303. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.18.071303.
57. Density-transition based electron injector for laser driven wakefield accelerators / K. Schmid [et al.] // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2010. — Vol. 13, issue 9. — P. 091301. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.13.091301.
 58. Optimizing density down-ramp injection for beam-driven plasma wakefield accelerators / A. Martinez de la Ossa [et al.] // Phys. Rev. Accel. Beams. — 2017. — Vol. 20, issue 9. — P. 091301. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.20.091301.
 59. Comparative study of amplified spontaneous emission and short pre-pulse impacts onto fast electron generation at sub-relativistic femtosecond laser-plasma interaction / K. A. Ivanov [et al.] // Phys. Plasmas. — 2014. — Vol. 21, no. 9. — P. 093110. — DOI: 10.1063/1.4896348.
 60. Prepulse controlled electron acceleration from solids by a femtosecond laser pulse in the slightly relativistic regime / K. A. Ivanov [et al.] // Phys. Plasmas. — 2017. — Vol. 24, no. 6. — P. 063109. — DOI: 10.1063/1.4986101.
 61. Propagation and guiding of intense laser pulses in plasmas / P. Sprangle [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69, issue 15. — P. 2200–2203. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.2200.
 62. Plasma guiding and wakefield generation for second-generation experiments / W. P. Leemans [et al.] // IEEE Trans. Plasma Sci. — 1996. — Vol. 24, no. 2. — P. 331–342. — DOI: 10.1109/27.509997.
 63. *Andreev N. E., Nishida Y., Yugami N.* Propagation of short intense laser pulses in gas-filled capillaries // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, issue 5. — P. 056407. — DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056407.
 64. High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding / C. G. R. Geddes [et al.] // Nature. — 2004. — Vol. 431, no. 7008. — P. 538–541. — ISSN 1476-4687. — DOI: 10.1038/nature02900.
 65. GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator / W. P. Leemans [et al.] // Nature Phys. — 2006. — Vol. 2, no. 10. — P. 696–699. — DOI: 10.1038/nphys418.

66. Multi-GeV electron beams from capillary-discharge-guided subpetawatt laser pulses in the self-trapping regime / W. P. Leemans [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113, no. 24. — P. 245002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.245002.
67. Petawatt Laser Guiding and Electron Beam Acceleration to 8 GeV in a Laser-Heated Capillary Discharge Waveguide / A. J. Gonsalves [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 122, issue 8. — P. 084801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.084801.
68. Control of focusing forces and emittances in plasma-based accelerators using near-hollow plasma channels / C. B. Schroeder [et al.] // *Phys. Plasmas.* — 2013. — Vol. 20, no. 8. — P. 080701. — DOI: 10.1063/1.4817799.
69. Beam loading in a laser-plasma accelerator using a near-hollow plasma channel / C. B. Schroeder [et al.] // *Phys. Plasmas.* — 2013. — Vol. 20, no. 12. — P. 123115. — DOI: 10.1063/1.4849456.
70. Laser-plasma-based linear collider using hollow plasma channels / C. B. Schroeder [et al.] // *Nucl. Instrum. Meth. A.* — 2016. — Vol. 829. — P. 113–116. — DOI: 10.1016/j.nima.2016.03.001.
71. Field-Reversed Bubble in Deep Plasma Channels for High-Quality Electron Acceleration / A. Pukhov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113, no. 24. — P. 245003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.245003.
72. Hollow plasma channel for positron plasma wakefield acceleration / W. D. Kimura [et al.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2011. — Vol. 14, issue 4. — P. 041301. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.14.041301.
73. Scheme for proton-driven plasma-wakefield acceleration of positively charged particles in a hollow plasma channel / L. Yi [et al.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2013. — Vol. 16, issue 7. — P. 071301. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.16.071301.
74. Variable profile capillary discharge for improved phase matching in a laser wakefield accelerator / D. Kaganovich [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* — 1999. — Vol. 75, no. 6. — P. 772–774. — DOI: 10.1063/1.124508.
75. Laser-heater assisted plasma channel formation in capillary discharge waveguides / N. A. Bobrova [et al.] // *Phys. Plasmas.* — 2013. — Vol. 20, no. 2. — P. 020703. — DOI: 10.1063/1.4793447.

76. Numerical Simulation of the Creation of a Hollow Neutral-Hydrogen Channel by an Electron Beam / V. V. Ivanov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, issue 20. — P. 205007. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.205007.
77. Simulation of free-space optical guiding structure based on colliding gas flows / D. Kaganovich [et al.] // *Appl. Opt.* — 2015. — Vol. 54, no. 31. — F144–F148. — DOI: 10.1364/AO.54.00F144.
78. *Noble R. J., Spencer J. E., Kuhlmeier B. T.* Hollow-core photonic band gap fibers for particle acceleration // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2011. — Vol. 14, issue 12. — P. 121303. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.14.121303.
79. Efficient hard X-ray source using femtosecond plasma at solid targets with a modified surface / S. Gavrilov [et al.] // *Laser Part. Beams.* — 2004. — Vol. 22, no. 3. — P. 301–306. — DOI: 10.1017/S026303460422314X.
80. Characteristic X-rays generation under the action of femtosecond laser pulses on nano-structured targets / A. Ovchinnikov [et al.] // *Laser Part. Beams.* — 2011. — Vol. 29, no. 2. — P. 249–254. — DOI: 10.1017/S026303461100022X.
81. Highly enhanced hard x-ray emission from oriented metal nanorod arrays excited by intense femtosecond laser pulses / S. Mondal [et al.] // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 83, issue 3. — P. 035408. — DOI: 10.1103/PhysRevB.83.035408.
82. Enhanced relativistic laser–plasma coupling utilizing laser-induced micromodified target / K. A. Ivanov [et al.] // *Laser Phys. Lett.* — 2015. — Vol. 12, no. 4. — P. 046005. — DOI: 10.1088/1612-2011/12/4/046005.
83. Nanostructured plasmas for enhanced gamma emission at relativistic laser interaction with solids / K. A. Ivanov [et al.] // *Appl. Phys. B.* — 2017. — Vol. 123, no. 10. — P. 252. — DOI: 10.1007/s00340-017-6826-4.
84. *Birdsall C. K., Langdon A. B.* Plasma physics via computer simulation. — CRC press, 2004.
85. *Pukhov A.* Particle-In-Cell Codes for Plasma-based Particle Acceleration // *CERN Yellow Rep.* — 2016. — Vol. 1. — P. 181. — DOI: 10.5170/CERN-2016-001.181.
86. Ultralow emittance electron beams from a laser-wakefield accelerator / R. Weingartner [et al.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2012. — Vol. 15, issue 11. — P. 111302. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.15.111302.

87. Optimization of laser-plasma injector via beam loading effects using ionization-induced injection / P. Lee [et al.] // *Phys. Rev. Accel. Beams*. — 2018. — Vol. 21, issue 5. — P. 052802. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.21.052802.
88. *Kostyukov I., Pukhov A., Kiselev S.* Phenomenological theory of laser-plasma interaction in “bubble” regime // *Phys. Plasmas*. — 2004. — Vol. 11, no. 11. — P. 5256. — DOI: 10.1063/1.1799371.
89. Electron Self-Injection in Multidimensional Relativistic-Plasma Wake Fields / I. Kostyukov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103, no. 17. — P. 175003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.175003.
90. *Lotov K. V.* Blowout regimes of plasma wakefield acceleration // *Phys. Rev. E*. — 2004. — Vol. 69, issue 4. — P. 046405. — DOI: 10.1103/PhysRevE.69.046405.
91. *Gordienko S., Pukhov A.* Scalings for ultrarelativistic laser plasmas and quasimonoeenergetic electrons // *Phys. Plasmas*. — 2005. — Vol. 12, no. 4. — P. 043109. — DOI: 10.1063/1.1884126.
92. *Pukhov A., Gordienko S.* Bubble regime of wake field acceleration: similarity theory and optimal scalings // *Phil. Trans. R. Soc. A*. — 2006. — Vol. 364, no. 1840. — P. 623–633. — DOI: 10.1098/rsta.2005.1727.
93. Generating multi-GeV electron bunches using single stage laser wakefield acceleration in a 3D nonlinear regime / W. Lu [et al.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. — 2007. — Vol. 10, issue 6. — P. 061301. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.10.061301.
94. *Jansen O., Tückmantel T., Pukhov A.* Scaling electron acceleration in the bubble regime for upcoming lasers // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* — 2014. — Vol. 223, no. 6. — P. 1017–1030. — DOI: 10.1140/epjst/e2014-02152-8.
95. A nonlinear theory for multidimensional relativistic plasma wave wakefields / W. Lu [et al.] // *Phys. Plasmas*. — 2006. — Vol. 13, no. 5. — P. 056709. — DOI: 10.1063/1.2203364.
96. Nonlinear Theory for Relativistic Plasma Wakefields in the Blowout Regime / W. Lu [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, issue 16. — P. 165002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.165002.

97. Beam Loading in the Nonlinear Regime of Plasma-Based Acceleration / M. Tzoufras [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101, issue 14. — P. 145002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.145002.
98. Beam loading by electrons in nonlinear plasma wakes / M. Tzoufras [et al.] // *Phys. Plasmas*. — 2009. — Vol. 16, no. 5. — P. 056705. — DOI: 10.1063/1.3118628.
99. *Rassou S., Bourdier A., Drouin M.* Influence of a strong longitudinal magnetic field on laser wakefield acceleration // *Phys. Plasmas*. — 2015. — Vol. 22, no. 7. — P. 073104. — DOI: 10.1063/1.4923464.
100. Laser wake-field acceleration and optical guiding in a hollow plasma channel / T. C. Chiou [et al.] // *Phys. Plasmas*. — 1995. — Vol. 2, no. 1. — P. 310–318. — DOI: 10.1063/1.871107.
101. Structure of the wake field in plasma channels / N. E. Andreev [et al.] // *Phys. Plasmas*. — 1997. — Vol. 4, no. 4. — P. 1145–1153. — DOI: 10.1063/1.872186.
102. *Shvets G., Li X.* Theory of laser wakes in plasma channels // *Phys. Plasmas*. — 1999. — Vol. 6, no. 2. — P. 591–602. — DOI: 10.1063/1.873204.
103. Synchrotron radiation from electron beams in plasma-focusing channels / E. Esarey [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Vol. 65, issue 5. — P. 056505. — DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056505.
104. *Kostyukov I., Kiselev S., Pukhov A.* X-ray generation in an ion channel // *Phys. Plasmas*. — 2003. — Vol. 10, no. 12. — P. 4818–4828.
105. *Kiselev S., Pukhov A., Kostyukov I.* X-ray generation in strongly nonlinear plasma waves // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, issue 13. — P. 135004. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.135004.
106. Femtosecond x rays from laser-plasma accelerators / S. Corde [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* — 2013. — Vol. 85, issue 1. — P. 1–48. — DOI: 10.1103/RevModPhys.85.1.
107. Gamma-rays from harmonically resonant betatron oscillations in a plasma wake / S. Cipiccia [et al.] // *Nature Phys.* — 2011. — Vol. 7. — P. 867–871. — DOI: 10.1038/nphys2090.
108. Production of a keV X-Ray Beam from Synchrotron Radiation in Relativistic Laser-Plasma Interaction / A. Rousse [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, issue 13. — P. 135005. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.135005.

109. Bright spatially coherent synchrotron X-rays from a table-top source / S. Kneip [et al.] // *Nature Phys.* — 2010. — Vol. 6. — P. 980–983. — DOI: 10.1038/nphys1789.
110. Laser based synchrotron radiation / K. T. Phuoc [et al.] // *Phys. Plasmas.* — 2005. — Vol. 12, no. 2. — P. 023101. — DOI: 10.1063/1.1842755.
111. Demonstration of the synchrotron-type spectrum of laser-produced Betatron radiation / S. Fourmaux [et al.] // *New J. Phys.* — 2011. — Vol. 13, no. 3. — P. 033017. — DOI: 10.1088/1367-2630/13/3/033017.
112. Quantitative X-ray phase-contrast microtomography from a compact laser-driven betatron source / J. Wenz [et al.] // *Nature Commun.* — 2015. — Vol. 6. — P. 7568. — DOI: 10.1038/ncomms8568.
113. Single shot phase contrast imaging using laser-produced Betatron x-ray beams / S. Fourmaux [et al.] // *Opt. Lett.* — 2011. — No. 13. — P. 2426–2428. — DOI: 10.1364/OL.36.002426.
114. Compact 0.56 Petawatt laser system based on optical parametric chirped pulse amplification in KD*P crystals / V. V. Lozhkarev [et al.] // *Laser Phys. Lett.* — 2007. — Vol. 4, no. 6. — P. 421. — DOI: 10.1002/lapl.200710008.
115. *Quesnel B., Mora P.* Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 58, issue 3. — P. 3719–3732. — DOI: 10.1103/PhysRevE.58.3719.
116. *Dodin I. Ye., Fisch N. J., Fraiman G. M.* Drift Lagrangian for a relativistic particle in an intense laser field // *JETP Lett.* — 2003. — Vol. 78, no. 4. — P. 202–206. — DOI: 10.1134/1.1622032.
117. *Балакин А. А., Фрайман Г. М.* Ускорение электронов в релятивистски сильных лазерных полях при столкновениях с ионами плазмы // *ЖЭТФ.* — 2006. — Т. 130, № 3. — С. 426—436. — DOI: 10.1134/S1063776106090068.
118. *Siegman A. E.* *Lasers.* — University Science Books, 1986.
119. Multi-MeV electron acceleration by subterawatt laser pulses / A. J. Goers [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115, issue 19. — P. 194802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.194802.

120. Попов В. С., Андреев Н. Е. Ускорение электронов при взаимодействии субтера-ваттного лазерного импульса с неоднородной плазмой // Квант. электрон. — 2019. — Т. 49, № 4. — С. 307—313. — DOI: 10.1070/QEL16992.
121. Sprangle P., Esarey E., Ting A. Nonlinear interaction of intense laser pulses in plasmas // Phys. Rev. A. — 1990. — Vol. 41, no. 8. — P. 4463. — DOI: 10.1103/PhysRevA.41.4463.
122. Sprangle P., Esarey E., Ting A. Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 64, issue 17. — P. 2011–2014. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.2011.
123. Власов А. А. Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения. — МГУ, 1945.
124. Lotov K. V. Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2003. — Vol. 6, issue 6. — P. 061301. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.6.061301.
125. Sosedkin A. P., Lotov K. V. LCODE: A parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2016. — Vol. 829. — P. 350–352. — DOI: 10.1016/j.nima.2015.12.032.
126. QUICKPIC: A highly efficient particle-in-cell code for modeling wakefield acceleration in plasmas / C. Huang [et al.] // J. Comp. Phys. — 2006. — Vol. 217, no. 2. — P. 658–679. — DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.039.
127. HiPACE: a quasi-static particle-in-cell code / T. Mehrling [et al.] // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2014. — Vol. 56, no. 8. — P. 084012. — DOI: 10.1088/0741-3335/56/8/084012.
128. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. Т. 10. — Наука, 1979.
129. Smilei: A collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation / J. Derouillat [et al.] // Comp. Phys. Commun. — 2018. — Vol. 222. — P. 351–373. — ISSN 0010-4655. — DOI: 10.1016/j.cpc.2017.09.024.
130. Smilei, <http://www.maisondelasimulation.fr/smilei/>.
131. Analytic model of electromagnetic fields around a plasma bubble in the blow-out regime / S. A. Yi [et al.] // Phys. Plasmas. — 2013. — Vol. 20, no. 1. — P. 013108. — DOI: 10.1063/1.4775774.

132. *Godfrey B. B.* Numerical Cherenkov instabilities in electromagnetic particle codes // *J. Comp. Phys.* — 1974. — Vol. 15, no. 4. — P. 504–521. — DOI: 10.1016/0021-9991(74)90076-X.
133. QUILL, http://iapras.ru/structure/dep_330/quill.html.
134. *Неруш Е. Н., Костюков И. Ю.* Моделирование эффектов квантовой электродинамики в сверхсильном лазерном поле // *ВАНТ.* — 2010. — Т. 4. — С. 3—7.
135. *Esirkepov T. Zh., Kato Y., Bulanov S. V.* Bow Wave from Ultraintense Electromagnetic Pulses in Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101, no. 26. — P. 265001. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.265001.
136. Dynamics of boundary layer electrons around a laser wakefield bubble / J. Luo [et al.] // *Phys. Plasmas.* — 2016. — Vol. 23, no. 10. — P. 103112. — DOI: 10.1063/1.4966047.
137. Transverse envelope dynamics of a 28.5-GeV electron beam in a long plasma / C. E. Clayton [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88, issue 15. — P. 154801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.154801.
138. *Jackson J. D.* Classical electrodynamics. — 1999.
139. *Zhang X., Khudik V. N., Shvets G.* Synergistic laser-wakefield and direct-laser acceleration in the plasma-bubble regime // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114, no. 18. — P. 184801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.184801.
140. Laser-driven plasma acceleration in a regime of strong-mismatch between the incident laser envelope and the nonlinear plasma response / A. A. Sahai [et al.]. — 2017. — arXiv: 1704.02913 [physics.plasm-ph].
141. Role of direct laser acceleration in energy gained by electrons in a laser wakefield accelerator with ionization injection / J. L. Shaw [et al.] // *Plasma Phys. Control. Fusion.* — 2014. — Vol. 56, no. 8. — P. 084006. — DOI: 10.1088/0741-3335/56/8/084006.
142. *Petrillo V., Serafini L., Tomassini P.* Ultrahigh brightness electron beams by plasma-based injectors for driving all-optical free-electron lasers // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2008. — Vol. 11, no. 7. — P. 070703. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.11.070703.

143. Simulation study of an LWFA-based electron injector for AWAKE Run 2 / B. Williamson [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2018. — Vol. 909. — P. 126–129. — DOI: 10.1016/j.nima.2018.02.005.
144. Laser wakefield acceleration with high-power, few-cycle mid-IR lasers / D. Papp [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2018. — Vol. 909. — P. 145–148. — DOI: 10.1016/j.nima.2018.01.050.
145. Simulation of monoenergetic electron generation via laser wakefield accelerators for 5–25 TW lasers / F. S. Tsung [et al.] // Phys. Plasmas. — 2006. — Vol. 13, no. 5. — P. 056708. — DOI: 10.1063/1.2198535.
146. Fast electron generation using PW-class PEARL facility / A. Soloviev [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2011. — Vol. 653, no. 1. — P. 35–41. — DOI: 10.1016/j.nima.2011.01.180.
147. Two-screen single-shot electron spectrometer for laser wakefield accelerated electron beams / A. A. Soloviev [et al.] // Rev. Sci. Instrum. — 2011. — Vol. 82, no. 4. — P. 043304. — DOI: 10.1063/1.3585862.
148. Spatial and temporal measurements of plasma/gas densities in a capillary gas-cell for laser-plasma accelerators / I. Nam [et al.] // J. Korean Phys. Soc. — 2016. — Vol. 69, no. 6. — P. 957–961. — DOI: 10.3938/jkps.69.957.
149. Characterisation of Tuneable Gas Target Profiles for Laser Wakefield Acceleration / V. Tomkus [et al.] // High-Brightness Sources and Light-driven Interactions. — 2018. — EM3B.4. — DOI: 10.1364/EUVXRAY.2018.EM3B.4.
150. Novel gas target for laser wakefield accelerators / C. Aniculaesei [et al.] // Rev. Sci. Instrum. — 2018. — Vol. 89, no. 2. — P. 025110. — DOI: 10.1063/1.4993269.
151. *Jasak H.* OpenFOAM: Open source CFD in research and industry // Int. J. Nav. Arch. Ocean Eng. — 2009. — Vol. 1, no. 2. — P. 89–94. — DOI: 10.2478/ijnaoe-2013-0011.
152. OpenFOAM, <https://www.openfoam.com/>.
153. *Geuzaine C., Remacle J.-F.* Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2009. — Vol. 79, no. 11. — P. 1309–1331. — DOI: 10.1002/nme.2579.
154. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator, <http://gmsh.info/>.

155. *Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.* — 1994. — Vol. 32, no. 8. — P. 1598–1605. — DOI: 10.2514/3.12149.
156. *Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // *Proceedings of the fourth international symposium on turbulence, heat and mass transfer.* — Antalya, Turkey : Begell House, 2003. — P. 625–632.
157. Betatron radiation enhancement by a density up-ramp in the bubble regime of LWFA / *D. Mašlárová [et al.]* // *Proc. SPIE.* — 2019. — Vol. 11037. — P. 1103710. — DOI: 10.1117/12.2520980.
158. Multi-GeV scale electron acceleration from self-guided laser wakefield accelerators with extended focussing geometry / *K. Poder [et al.]* // *44th EPS Conference on Plasma Physics.* — Belfast, Northern Ireland, 2017. — P. I2.207.
159. *Yee K.* Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media // *IEEE Trans. Antennas Propag.* — 1966. — Vol. 14, no. 3. — P. 302–307. — DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
160. *Taflove A.* Review of the formulation and applications of the finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures // *Wave Motion.* — 1988. — Vol. 10, no. 6. — P. 547–582. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-2125\(88\)90012-1](https://doi.org/10.1016/0165-2125(88)90012-1).
161. *Pukhov A.* Three-dimensional electromagnetic relativistic particle-in-cell code VLPL (Virtual Laser Plasma Lab) // *J. Plasma Phys.* — 1999. — Vol. 61, no. 3. — P. 425–433.
162. Simulation of laser pulse amplification in a plasma by a counterpropagating wave / *H. J. Lee [et al.]* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* — 2002. — Vol. 30, no. 1. — P. 40–41. — DOI: 10.1109/TPS.2002.1003913.
163. OSIRIS: A Three-Dimensional, Fully Relativistic Particle in Cell Code for Modeling Plasma Based Accelerators / *R. A. Fonseca [et al.]* // *Computational Science — ICCS 2002.* — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2002. — P. 342–351. — DOI: 10.1007/3-540-47789-6_36.

164. *Nieter C., Cary J. R.* VORPAL as a Tool for the Study of Laser Pulse Propagation in LWFA // Computational Science — ICCS 2002. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2002. — P. 334–341. — DOI: 10.1007/3-540-47789-6_35.
165. Contemporary particle-in-cell approach to laser-plasma modelling / T. D. Arber [et al.] // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2015. — Vol. 57, no. 11. — P. 113001. — DOI: 10.1088/0741-3335/57/11/113001.

Список работ по диссертации

- A1. Обобщенная модель границы плазменной полости, возбуждаемой коротким лазерным импульсом или релятивистским электронным сгустком в поперечно-неоднородной плазме / А. А. Голованов, И. Ю. Костюков, А. М. Пухов, Й. Томас // Квант. электрон. — 2016. — Т. 46, № 4. — С. 295—298. — DOI: 10.1070/QEL16040.
- A2. Non-linear theory of a cavitated plasma wake in a plasma channel for special applications and control / J. Thomas, I. Yu. Kostyukov, J. Pronold, A. Golovanov, A. Pukhov // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23, no. 5. — P. 053108. — DOI: 10.1063/1.4948712.
- A3. Beam loading in the bubble regime in plasmas with hollow channels / A. A. Golovanov, I. Yu. Kostyukov, J. Thomas, A. Pukhov // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23, no. 9. — P. 093114. — DOI: 10.1063/1.4962565.
- A4. Образование и динамика плазмы в сверхсильных лазерных полях с учетом радиационных и квантово-электродинамических эффектов / И. И. Артеменко, А. А. Голованов, И. Ю. Костюков, Т. М. Кукушкина, В. С. Лебедев, Е. Н. Неруш, А. С. Самсонов, Д. А. Серебряков // Письма в ЖЭТФ. — 2016. — Т. 104, № 12. — С. 892—902. — DOI: 10.1134/S0021364016240085.
- A5. Модель дельта-слоя для границы плазменной полости, возбуждаемой в плазменном канале электронным сгустком или лазерным импульсом / Й. Томас, А. А. Голованов, И. Ю. Костюков, А. М. Пухов // Квант. электрон. — 2017. — Т. 47, № 3. — С. 228—231. — DOI: 10.1070/QEL16313.
- A6. Голованов А. А., Костюков И. Ю. Особенности бетатронных колебаний и бетатронного излучения в плазме с полым каналом // Квант. электрон. — 2017. — Т. 47, № 3. — С. 188—193. — DOI: 10.1070/QEL16305.
- A7. Analytic model for electromagnetic fields in the bubble regime of plasma wakefield in non-uniform plasmas / A. A. Golovanov, I. Yu. Kostyukov, J. Thomas, A. Pukhov // Phys. Plasmas. — 2017. — Vol. 24, no. 10. — P. 103104. — DOI: 10.1063/1.4996856.

- A8. Bubble regime in deep plasma channels / A. A. Golovanov, I. Yu. Kostyukov, A. Pukhov, J. Thomas // AIP Conf. Proc. — 2017. — Vol. 1812, no. 1. — P. 070005. — DOI: 10.1063/1.4975885.
- A9. *Golovanov A. A., Lebedev V. S., Kostyukov I. Yu.* Design of a gas cell for laser wakefield acceleration of electrons // *Probl. Atom. Sci. Tech.* — 2018. — Vol. 116. — P. 70–75.
- A10. *Golovanov A. A., Kostyukov I. Yu.* Bubble regime of plasma wakefield in 2D and 3D geometries // *Phys. Plasmas.* — 2018. — Vol. 25, no. 10. — P. 103107. — DOI: 10.1063/1.5047274.
- A11. Нагрузка плазменной полости электронным сгустком в глубоком плазменном канале / А. А. Голованов, И. Ю. Костюков, Й. Томас, А. М. Пухов // XVII научная школа «Нелинейные волны – 2016». — Нижний Новгород, 2016. — С. 47.
- A12. *Golovanov A.* Analytical theory of blowout regime in radially inhomogeneous plasmas // *Science of the Future* — 2016. — Kazan, Russia, 2016. — P. 490–492.
- A13. Analytic model for electromagnetic fields in the bubble regime of plasma wakefield / A. A. Golovanov, I. Yu. Kostyukov, J. Thomas, A. M. Pukhov // *Topical Problems of Nonlinear Wave Physics.* — Moscow, Russia, 2017. — P. 71.
- A14. Аналитическая модель для электромагнитного поля в сильно нелинейной кильватерной волне / А. А. Голованов, И. Ю. Костюков, Й. Томас, А. М. Пухов // XVIII научная школа «Нелинейные волны – 2018». — Нижний Новгород, 2018. — С. 34–36.
- A15. *Лебедев В. С., Голованов А. А., Костюков И. Ю.* Численное моделирование ускорения электронов в плазме с продольной неоднородностью // XXIII Нижегородская сессия молодых ученых. Т. 2. — Нижний Новгород, 2018. — С. 29.
- A16. *Golovanov A. A., Lebedev V. S., Kostyukov I. Yu.* Gas cell for laser-wakefield acceleration at PEARL facility // 35th European Conference on Laser Interaction with Matter. — Rethymno, Greece, 2018. — P. 109.
- A17. *Golovanov A. A., Kostyukov I. Yu.* Simulations of laser-wakefield acceleration in a gas cell // VII International Conference “Frontiers of Nonlinear Physics”. — Nizhny Novgorod, Russia, 2019. — P. 71.

Список иллюстраций

- 1 Режимы плазменных кильватерных волн, возбуждаемых коротким циркулярно поляризованным лазерным импульсом: линейный, нелинейный, сильно нелинейный. На верхних графиках показано распределение концентрации электронов в кильватерной волне, полученное в результате численного моделирования взаимодействия импульса с плазмой. Интенсивность лазерного импульса, распространяющегося в направлении оси z (на рисунках вправо), показана красным цветом. На нижних графиках продемонстрированы соответствующие распределения продольного электрического поля на оси распространения импульса. 7
- 2 Результаты численного моделирования плазменной полости, возбуждаемой электронным сгустком в плазме с полым каналом. Распределения в пространстве (а) плотности заряда электронов (включая драйвер), (b) разности $J_z - \rho$, (c) продольной компоненты плотности тока J_z . На рисунках (d–f) показаны те же распределения в поперечном сечении, показанном на рисунках (a–b) штриховой линией. Полый канал виден на рисунке (a) перед драйвером, а также на рисунках (b, e), где соответствует участку $J_z - \rho = 0$ внутри плазменной полости. 36
- 3 Графики функций $\hat{\beta}(\epsilon)$ и их производных $\hat{\beta}'(\epsilon)$ для экспоненциального (сплошная линия) и прямоугольного (штриховая линия) профилей электронного слоя. Пунктирной линией показано решение $\hat{\beta}(\epsilon) = \epsilon$ в приближении $\epsilon \ll 1$ 43
- 4 Относительная ошибка вычисления коэффициента A (a) в приближении бесконечно тонкого слоя $A = r_b(1 + r_b^2/4)$ и (b) в релятивистском приближении $A = r_b^3/4$ при сравнении с истинным значением (2.17). Штриховой линией показан уровень 0.25. 46

5	Относительная ошибка вычисления коэффициента B в обоих приближениях ($B = \kappa_b^2/2$) при сравнении с истинным значением (2.18). Штриховой линией показан уровень 0.25.	47
6	Относительная ошибка вычисления коэффициента C (а) в приближении бесконечно тонкого слоя $C = \kappa_b^2/2$ и (б) в релятивистском приближении $C = \kappa_b^2/4$ при сравнении с истинным значением (2.19). Штриховой линией показан уровень 0.25.	47
7	Корень суммы квадратов ошибок вычисления коэффициентов A, B, C для (а) приближения бесконечно тонкого слоя и (б) релятивистского приближения. Штриховой линией показан уровень 0.25.	48
8	Распределение электронной плотности в плазменной полости, возбуждаемой релятивистским электронным сгустком в плазме с полым каналом. Граница плазменной полости, вычисленная по формуле (2.28) в релятивистском приближении, показана штриховой линией. Все линейные размеры нормированы на $k_p^{-1} = \lambda_p/2\pi$	48
9	Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения продольного электрического поля E_z в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (2.35, 2.37). Штриховая линия соответствует сечению, показанному на Рис. 10(b).	52
10	Распределения продольного электрического поля E_z вдоль (а) $x = 0$, (б) $z = 42$, соответствующие распределению на Рис. 9. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам.	53
11	Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения азимутального магнитного поля B_y в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (2.42, 2.47). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на Рис. 12.	55

- 12 Распределения азимутального магнитного поля B_y вдоль (а) $x = 5$, (b) $z = 39$, соответствующие распределению на Рис. 11. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам. 55
- 13 Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения радиального электрического поля E_x в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (2.49, 2.50). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на Рис. 14. 57
- 14 Распределения радиального электрического поля E_x вдоль (а) $x = 4$, (b) $z = 39$, соответствующие распределению на Рис. 13. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам. 57
- 15 Зависимости (а) границ ненагруженных плазменных полостей r_b и (b) продольного электрического поля E_z в них от продольной координаты ξ в плазме со степенным профилем с различными показателями степени n , рассчитанные по формулам (2.65) и (2.64). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$ 62
- 16 Зависимости (а) границ ненагруженных плазменных полостей r_b и (b) продольного электрического поля E_z в них от продольной координаты ξ в плазме с каналами различного радиуса r_c , рассчитанные по формулам (2.63) и (2.64). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$ 63
- 17 (а–с) Распределения плотности заряда электронов в пространстве и (d–f) соответствующие продольные электрические поля на оси плазменной полости, наблюдаемые в численном моделировании методом частиц в ячейках для плазмы с каналом $\rho_i(r) = \theta(r - r_c)$ и радиусов канала $r_c = 0, 0.8\pi$ и 1.6π соответственно. Аналитические решения для границы плазменной полости и продольного электрического поля, задаваемые выражениями (2.63) и (2.64), показаны штриховыми линиями. Все пространственные масштабы нормированы на $\lambda_p = 5$ мкм. 65

- 18 Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения поперечной силы $F_x = B_y - E_x$ в плазменной полости, показанной на Рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формуле (3.6). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на Рис. 19. 69
- 19 Распределения поперечной силы F_x вдоль (а) $x = 9$, (b) $z = 42$, соответствующие распределению на Рис. 18. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам. 70
- 20 Граница нагруженной плазменной полости $r_b(\xi)$ с электронным сгустком $\lambda(\xi)$ с параболическим профилем. Максимальный размер плазменной полости R_b . Штриховыми линиями показаны решения для ненагруженных плазменных полостей с размерами R_b и \tilde{R}_b 72
- 21 Зависимости (а) границ плазменных полостей r_b и (b) продольных электрических полей E_z от продольной координаты ξ для разных плотностей заряда электронного сгустка λ_0 . Зависимости рассчитаны численно с использованием уравнений (2.52) и (2.53) соответственно. Линии 1–5 показывают решения для плотностей λ_0 от 0 до $2\lambda_{th}$ с шагом $0.5\lambda_{th}$. При вычислении использован параболический профиль плазмы ($n = 2$), максимальный радиус плазменных полостей $R_b = 10$, точка инжекции электронного сгустка $\xi_{inj} = 4$ 76
- 22 Зависимости эффективности η от плотности заряда λ_0 , вычисленные по формуле (3.23) для различных показателей степени n ($n = 0, 2, 4$ для сплошной, штриховой и пунктирной линий соответственно) для точки инжекции (а) $\xi_{inj} = 2$ и (b) $\xi_{inj} = 4$. Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$ 77
- 23 Схематическое изображение искомой формы плазменной полости $r_b(\xi)$ и продольного электрического поля E_z в ней. Штриховой линией показано решение для ненагруженной плазменной полости. 78
- 24 Зависимости плотности заряда λ в ускоряемых сгустках от продольной координаты ξ , вычисленные по формуле (3.32) для степенных профилей плазмы $\rho_i \propto r^n$ с различными показателями степени n . Точка инжекции $\xi_{inj} = 3$, максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$ 80

- 25 Зависимости (а) границ плазменных полостей r_b и (б) продольных электрических полей E_z в них от продольной координаты ξ , рассчитанные численно по формулам (2.52) и (2.53) соответственно для степенных профилей плазмы $\rho_i \propto r^n$ с различными показателями степени n и электронных сгустков, определяемых выражением (3.32). Сплошная, штриховая и пунктирная линии соответствуют $n = 0, 2, 4$. Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$, точка инжекции $\xi_{inj} = 3$ 81
- 26 Зависимости плотности заряда λ в ускоряемых сгустках от продольной координаты ξ для плазмы с полым каналом $\rho_i = \theta(r - r_c)$ для различных радиусов канала r_c . Зависимости рассчитаны численно по формулам (3.27) и (3.28). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$, точка инжекции $\xi_{inj} = 3$ 82
- 27 (а) Плазменная полость (б) и усредненное по времени продольное электрическое поле E_z на оси полости для ускоряемого электронного сгустка с профилем, выбранным по формулам (3.27, 3.28). Радиус канала $r_c = 1.2\pi$. Аналитические решения, вычисленные по формулам (2.52) и (2.53), показаны штриховыми линиями. Все размеры нормированы на $\lambda_p = 5$ мкм. 83
- 28 Траектория бетатронных колебаний частицы (схематически) в (а) однородной плазме; (б) плазме с каналом (канал показан более темным фоном). 85
- 29 Зависимость отношения периода бетатронных колебаний в плазме с каналом T_b к периоду колебаний в однородной плазме T_{b0} от поперечного импульса электрона для канала радиуса (а) $r_c = 0.3$, (б) $r_c = 1$. Штриховой линией показано решение (3.42) в приближении малого импульса, пунктирной — решение для однородной плазмы. Лоренц-фактор электрона $\gamma = 400$ 86
- 30 График функции $S(x)$, задаваемой выражением (3.43). 88

- 31 Зависимость отношения критической частоты в плазме с каналом ω_{cr} к критической частоте в однородной плазме ω_{cr0} в зависимости от поперечного импульса электрона для канала радиуса (a) $r_c = 0.3$; (b) $r_c = 1$. Штриховой линией показано решение (3.46) в приближении малости импульса, пунктирной — решение для однородной плазмы. Лоренц-фактор электрона $\gamma = 400$ 89
- 32 Зависимость отношения критической частоты на втором этапе ω'_{cr} к критической частоте на первом ω_{cr} от соотношений концентраций плазмы для случаев однородной плазмы и плазмы с каналом на втором этапе. 92
- 33 Распределение концентрации электронов (a) в плазменной полости в двумерном пространстве, (b) в аксиально-симметричной плазменной полости в трехмерном пространстве. Плазменные полости генерируются электронными сгустками, движущимися вправо. Штриховые линии соответствуют аналитическим решениям для границы плазменной полости, задаваемыми уравнениями (4.25) и (4.31) соответственно. Для сравнения пунктирная линия в (a) также показывает решение для плазменной полости в трехмерном пространстве. Все размеры нормированы на $c/\omega_p = \lambda_p/2\pi$ 103
- 34 Продольные электрические поля E_z в плазменных полостях, показанных на Рис. 33. Штриховые линии соответствуют аналитическим решениям, задаваемым уравнениями (4.26) и (2.53) соответственно. Для сравнения пунктирной линией в (a) показано аналитическое решение для аксиально-симметричной плазменной полости. 104
- 35 Распределение концентрации электронов в плоскостях zy и zx в плазменной полости, возбужденной дискообразным электронным сгустком с различными поперечными размерами. Штриховая линия показывает аналитическое решение для двумерной плазменной полости в однородной плазме, рассчитанное по формуле (4.25). Все размеры нормированы на $\lambda_p/2\pi$ 105

- 36 Продольное электрическое поле E_x на оси и поперечные силы F_y и F_z в плоскости $x = 16.5$ в плазменной полости, показанной на Рис. 35. Штриховые линии соответствуют аналитическим решениям. 106
- 37 Зависимости оптимального значения a_0 , задаваемого выражением (5.1), и минимального значения a_0 для обеспечения самоканализирования от концентрации плазмы. 111
- 38 Схема двумерной газовой ячейки. Стрелками показано течение газа в ячейке. Штриховая линия соответствует оси распространения лазерного импульса. 114
- 39 (а) Плотность газа $\rho(x)$ на оси ячейки, показанной на Рис. 38. Вертикальные штриховые линии соответствуют границам ячейки. Горизонтальная пунктирная линия показывает ожидаемую плотность в стационарном состоянии при давлении 8 кПа и температуре 300 К. (b) Плотность газа для различных длин газовой ячейки (1, 2, 3 см). 115
- 40 Плотность газа на оси газовой ячейки (а) для различных длин выходных отверстий (1, 2, 4 мм), (b) для различных поперечных размеров выходных отверстий (0.5, 1, 2 мм) при размере входного отверстия 3 мм. Вертикальные штриховые линии показывают границу ячейки. Горизонтальные пунктирные линии показывают ожидаемую плотность в стационарном состоянии при давлении 8 кПа и температуре 300 К. . . 116
- 41 Трехмерная модель газовой ячейки. 117
- 42 Распределение плотности газа на оси газовой ячейки, показанной на Рис. 41. Вертикальные штриховые линии показывают границу ячейки, горизонтальная пунктирная — ожидаемую плотность в стационарном состоянии при давлении 8 кПа и температуре 300 К. 118
- 43 Модель двухсекционной газовой ячейки. 118

- 44 (а) Распределения плотности газа в двухсекционной газовой ячейке без подводящей трубки во второй секции для различных поперечных размеров отверстия между двумя камерами. Сплошная, пунктирная и штриховая линии соответствуют размерам 0.2, 0.5, 2 мм соответственно; размер выходных отверстий 1 мм. (б) Распределение плотности газа в двухстадийной газовой ячейке для давлений в первой и второй подводящих трубках 8 кПа и 4 кПа соответственно. Размер выходных отверстий 1 мм, размер отверстия между двумя камерами 0.2 мм. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют ожидаемым уровням плотности при двух рассматриваемых давлениях. Вертикальные штриховые линии показывают границы камер. 120
- 45 Двумерная модель газовой ячейки. Затененные участки показывают границы со специальными граничными условиями (ГУ) для подводящей трубки и вакуума снаружи ячейки. Прочие границы имеют стеночные граничные условия. 121
- 46 Профили плотности газа в газовой ячейке, показанной на Рис. 45, для различных давлений газа на входе. Вертикальные штриховые линии показывают границы газовой ячейки. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют ожидаемым уровням плотности при рассматриваемых давлениях. 121
- 47 Распределение интенсивности лазерного импульса и концентрации электронов плазмы (а) снаружи газовой ячейки ($l = -4$ мм) (б) внутри газовой ячейки ($l = 9$ мм). Концентрация плазмы $n_p = 1.5 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Дистанция l отсчитывается от левой границы газовой ячейки (см. Рис. 46). Лазерный импульс распространяется на рисунках вправо. Все размеры нормированы на лазерную длину волны $\lambda = 910$ нм. 124
- 48 Зависимость полного заряда электронов с энергией более 500 МэВ от расстояния, пройденного лазерным импульсом внутри ячейки, для различных максимальных концентраций электронов в плазме в PIC моделировании. 124

- 49 Зависимости энергетических спектров электронов с энергией более 200 МэВ от расстояния, пройденного лазерным импульсом, для различных концентраций плазмы. Вертикальные линии соответствуют мгновенным спектрам, показанным на Рис. 50. 125
- 50 Мгновенные энергетические спектры электронов для различных концентраций, соответствующие расстояниям, показанным вертикальными линиями на Рис. 49. Затемненные области соответствуют величине разброса по энергии по уровню $1/2$ максимума. 126
- 51 Зависимости наибольших наблюдавшихся положений максимумов функции распределения электронов по энергий и отсечек (по уровню $1/e$ от максимума) в моделировании и экспериментальных данных. Штриховой линией показана теоретическая оценка по формуле (5.6). 127